

Signale und Systeme – Ergänzungen zu den Spektraltransformationen

Gerhard Schmidt

Christian-Albrechts-Universität zu Kiel

Technische Fakultät

Elektrotechnik und Informationstechnik

Digitale Signalverarbeitung und Systemtheorie



Gesamtübersicht

- ❑ Signale und Systeme – Einführung
- ❑ Signale
- ❑ Spektraldarstellungen determinierter Signale
- ❑ Lineare Systeme
- ❑ Modulation
- ❑ Systembeschreibung im Zustandsraum
- ❑ Stochastische Signale und ihre Spektren
- ❑ Reaktion linearer Systeme auf stationäre stochastische Signale
- ❑ Idealisierte Systeme
- ❑ ***Ergänzungen zu Spektraltransformationen***



Inhalt des Abschnitts „Ergänzungen zu den Spektraltransformationen“

- ...
- Idealisierte Systeme
- ***Ergänzungen zu den Spektraltransformationen***
 - ***Spektren kontinuierlicher und diskreter Signale bei Abtastung***
 - ***Fourier-Transformation***
 - ***Laplace- und z-Transformation***
 - ***Fourier-Reihe und DFT***
 - ***Konvergenzbedingungen und inverse Transformationen***

Spektren kontinuierlicher und diskreter Signale bei Abtastung – Teil 1

Fourier-Transformation – Teil 1:

Gegeben sei ein kontinuierliches Signal samt seines Spektrums

$$v_0(t) \circ \bullet V_0(j\omega).$$

Durch Multiplikation mit einem Impulskamm $p(t)$ erhalten wir daraus das Signal

$$y_p(t) = v_0(t)p(t).$$

Setzen wir nun die Definition des Impulskamms

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_0(t - nT_A)$$

ein (mit der Abtastfrequenz $f_A = 1/T_A$) und verwenden die Ausblendeigenschaft des Dirac-Stoßes, so erhalten wir

$$y_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_0(nT_A) \delta_0(t - nT_A).$$

Nach Transformation in den Fourier-Bereich ergibt sich schließlich

$$y_p(t) \circ \bullet Y_p(j\omega) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} V_0\left(j\left(\omega - \mu \frac{2\pi}{T_A}\right)\right).$$

Fourier-Transformation – Teil 2:

Dieses erste Ergebnis für die Berechnung des Spektrums sei hier noch einmal wiederholt:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} v_0(nT_A) \delta_0(t - nT_A) = y_p(t) \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad Y_p(j\omega) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} V_0\left(j\left(\omega - \mu \frac{2\pi}{T_A}\right)\right).$$

Die Abtastung entspricht also einer periodischen Wiederholung des Spektrums $V_0(j\omega)$ mit der Periode $\omega_p = 2\pi/T_A = 2\pi f_A$!

Andererseits kann man aber auch die Abkürzung $v_0(nT_A) = v(n)$ einführen

$$y_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v(n) \delta_0(t - nT_A)$$

und bei der Spektralberechnung zunächst jede einzelne Dirac-Distribution transformieren:

$$\delta_0(t - nT_A) \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad e^{-j\omega T_A n}.$$

Führt man nun noch die Abkürzung $\Omega = \omega T_A$ ein, so ergibt sich für die Fourier-Transformation

$$Y_p(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v(n) e^{-j\Omega n}.$$

Fourier-Transformation – Teil 3:

Ergebnis der letzten Folie:

$$Y_p(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v(n) e^{-j\Omega n}.$$

Hierbei erkennt man, dass dies gerade die Fourier-Transformation für diskrete Signale und Systeme ist. Hiervon wissen wir, dass das Ergebnis wiederum periodisch mit der Periode 2π ist, d.h. es gilt:

$$Y_p(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v(n) e^{-j\Omega n} = V(e^{j\Omega}) = V(e^{j(\Omega + \lambda 2\pi)}).$$

Zusammengefasst kann man festhalten:

Das mit $\omega_p = 2\pi f_A$ periodische Spektrum nach der Abtastung des Signals $y_p(t)$ ist identisch mit dem Spektrum $V(e^{j\Omega})$ der Folge $v(n)$, wenn $\Omega = \omega T_A$ ist, d.h. die Periode $\Omega_p = 2\pi$ ist:

$$V(e^{j\Omega}) \Big|_{\Omega=\omega T_A} = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} V_0\left(j\left(\omega - \mu \frac{2\pi}{T_A}\right)\right).$$

Spektren kontinuierlicher und diskreter Signale bei Abtastung – Teil 4

Laplace- und z-Transformation:

Eine völlig gleichartige Überlegung (in Bezug auf die letzten drei Folien) führt auf die Beziehung zwischen der Laplace- und der z-Transformation für abgetastete Signale. Es ergibt sich, wiederum unter Verwendung folgender Signaldefinitionen bzw. Abkürzungen

$$y_p(t) = v_0(t)p(t), \quad \text{mit} \quad p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_0(t - nT_A),$$

$$V_0(s) = \mathcal{L}\{v_0(t)\},$$

$$V(z) = \mathcal{Z}\{v(n)\},$$

der Zusammenhang:

Die Laplace-Transformierte des abgetasteten Signals $y_p(t)$ ist identisch mit der z-Transformierten $V(z)$ der Folge $v(n) = v_0(nT_A)$, wenn $z = e^{sT_A}$ ist:

$$V(z) \Big|_{z = e^{sT_A}} = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} V_0\left(s - \mu \frac{2\pi}{T_A}\right).$$

Fourier-Reihe und DFT – Teil 1:

Ähnlich zu den Überlegungen der letzten Folien kann auch ein Zusammenhang zwischen einer **Fourier-Reihe eines kontinuierlichen periodischen Signals** und der **DFT der abgetasteten (diskreten) Signalform** hergeleitet werden.

Wir gehen hierzu von einem periodischen (oder endlich langen und dann periodisch fortgesetzten) Signal

$$v_0(t) \quad \text{mit} \quad t \in [0, T]$$

aus. Bestimmt man die Fourier-Reihe dieses Signals, so gilt

$$v_0(t) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} c_{\mu} e^{j\mu \frac{2\pi}{T} t}$$

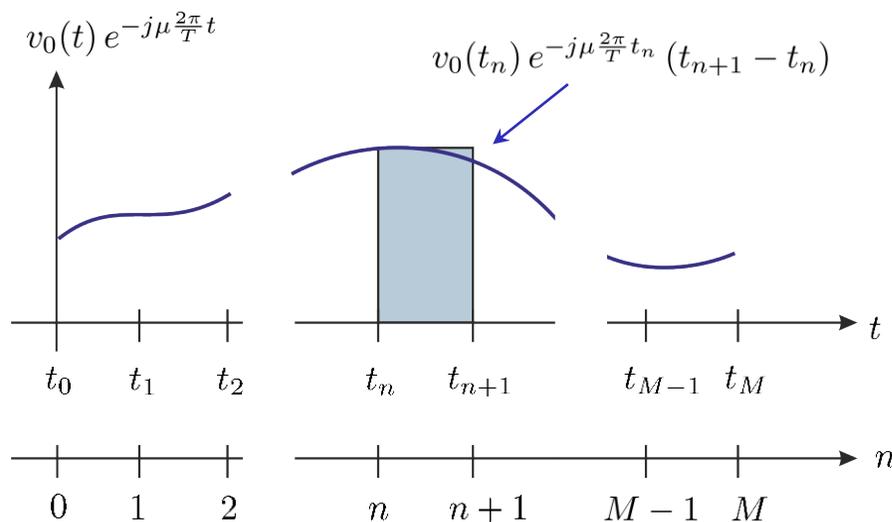
mit den Reihen-Koeffizienten:

$$c_{\mu} = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T v_0(t) e^{-j\mu \frac{2\pi}{T} t} dt.$$

Fourier-Reihe und DFT – Teil 2:

Gesucht ist nun eine Möglichkeit, wie man aus dem Integral eine Summe machen kann. In dieser Summe sollten dann lediglich Abtastwerte des Signals vorkommen. Damit wäre dann eine **numerische Möglichkeit** geschaffen (anstelle einer analytischen), die **Fourier-Koeffizienten anzunähern** bzw. unter noch zu findenden Voraussetzungen exakt zu bestimmen.

Zunächst werden wir versuchen, das Integral mit der sogenannten „**Rechteckregel**“ anzunähern.



$$c_\mu = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T v_0(t) e^{-j\mu \frac{2\pi}{T} t} dt$$

$$\approx \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{M-1} v_0(t_n) e^{-j\mu \frac{2\pi}{T} t_n} (t_{n+1} - t_n).$$

Der besseren Übersicht halber wurde das komplexe Signal $v_0(t) e^{-j\mu \frac{2\pi}{T} t}$ lediglich reellwertig dargestellt!

Fourier-Reihe und DFT – Teil 3:

Eine naheliegende Möglichkeit für die **Parameter** der Rechteckregel

$$c_\mu = \frac{1}{T} \int_0^T v_0(t) e^{-j\mu \frac{2\pi}{T} t} dt \approx \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{M-1} v_0(t_n) e^{-j\mu \frac{2\pi}{T} t_n} (t_{n+1} - t_n)$$

ist dabei:

$$\begin{aligned}
 t_n &= nT_A, && \leftarrow \text{Äquidistante Abtastzeitpunkte} \\
 t_{n+1} - t_n &= T_A \quad \forall n, && \leftarrow \text{Gleicher Stützstellenabstand} \\
 T &= MT_A, \\
 v_0(t_n) &= v_0(nT_A) = v(n).
 \end{aligned}$$

Damit **vereinfacht** sich die o.g. Näherung zu

$$c_\mu \approx \frac{1}{MT_A} \sum_{n=0}^{M-1} v(n) e^{-j\mu \frac{2\pi}{MT_A} nT_A} T_A = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} v(n) e^{-j\mu \frac{2\pi}{M} n}.$$

Fourier-Reihe und DFT – Teil 4:

Ergebnis der letzten Folie:

$$c_\mu \approx \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} v(n) e^{-j\mu \frac{2\pi}{M} n}.$$

Betrachtet man dieses Ergebnis genauer, so erkennt man, dass es sich hier – abgesehen von der Gewichtung mit $1/M$ – um die Berechnung einer **DFT** handelt. Es gilt also

$$c_\mu \approx \frac{1}{M} V_M(\mu) = \frac{1}{M} \text{DFT}\{v(n)\} \quad \text{mit } \mu \in \{0, 1, \dots, M-1\}.$$

Es stellen sich nun noch einige Fragen:

- Wie gut ist diese Näherung?
- Woher rühren die verbleibenden Abweichungen?
- Kann man evtl. durch eine andere Integrationsregel eine Verbesserung erreichen?

Fourier-Reihe und DFT – Teil 5:

Für die Beantwortung der zuvor gestellten Fragen, versuchen wir zunächst einen Zusammenhang zwischen den Fourier-Reihen-Koeffizienten und den DFT-Werten zu finden. Hierzu starten wir mit der Definition der DFT:

$$V_M(\mu) = \sum_{n=0}^{M-1} v_0(nT_A) e^{-j\mu \frac{2\pi}{MT_A} nT_A}$$

... Einsetzen der Fourier-Reihen-Darstellung des Signals $v_0(t)$ an den Stützstellen nT_A ...

$$= \sum_{n=0}^{M-1} \left[\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu e^{j\nu \frac{2\pi}{MT_A} nT_A} \right] e^{-j\mu \frac{2\pi}{MT_A} nT_A}$$

... Vertauschen der Summationsreihenfolge und Vereinfachen der Exponentialterme ...

$$= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu \sum_{n=0}^{M-1} e^{j\nu \frac{2\pi}{M} n} e^{-j\mu \frac{2\pi}{M} n}$$

... Zusammenfassen der Exponentialterme ...

$$= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu \sum_{n=0}^{M-1} e^{j(\nu-\mu) \frac{2\pi}{M} n}.$$

Fourier-Reihe und DFT – Teil 6:

Die endliche geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{M-1} e^{j\kappa \frac{2\pi}{M} n}$$

können wir wie folgt umformen:

$$\sum_{n=0}^{M-1} e^{j\kappa \frac{2\pi}{M} n} = \begin{cases} M, & \text{falls } \kappa = \lambda M, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} = M \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \gamma_0(\kappa - \lambda M).$$

Damit ergibt sich für den Zusammenhang zwischen DFT- und Fourier-Reihen-Koeffizienten:

$$V_M(\mu) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu \sum_{n=0}^{M-1} e^{j(\nu-\mu) \frac{2\pi}{M} n}$$

... Vereinfachen der endlichen, geometrischen Reihe (siehe oben) ...

$$= M \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \gamma_0((\nu - \mu) + \lambda M) = \boxed{M \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} c_{\mu+\lambda M} = V_M(\mu)}.$$

Fourier-Reihe und DFT – Teil 7:

Um dieses Ergebnis, d.h.

$$V_M(\mu) = M \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} c_{\mu+\lambda M},$$

besser interpretieren zu können, folgen einige **Bemerkungen**:

- Die DFT liefert (bis auf den Faktor M) die periodische Überlagerung der (unendlich vielen) Fourier-Reihen-Koeffizienten c_μ .
- Die Periode der Wiederholung ist M . Drückt man dies als Frequenz aus, so ergibt sich

$$M \frac{2\pi}{T} = M \frac{2\pi}{MT_A} = \frac{2\pi}{T_A} = 2\pi f_A.$$

- Es gibt Signale, für die gilt:

$$V_M(\mu) = M c_\mu.$$

D.h. die Näherung gilt exakt, trotz der „simplen“ Rechteckregel.
Die Voraussetzungen dafür sind auf der nächsten Folie beschrieben.

Fourier-Reihe und DFT – Teil 8:**Bemerkungen** (Fortsetzung):

- Voraussetzungen damit die Näherung

$$V_M(\mu) = M c_\mu.$$

exakt gilt:

- Beschränkung der im Allgemeinen unendlich langen Reihe auf M benachbarte Werte c_μ , d.h. $\mu \in \{0, 1, \dots, M - 1\}$.
- Dies kann erreicht werden, in dem das Spektrum auf das Frequenzband $\omega \in [0, \omega_A)$ bzw. wegen der impliziten Periodizität auf

$$\omega \in \left(-\frac{\omega_A}{2}, \frac{\omega_A}{2}\right)$$

begrenzt wird.

Bei Einhaltung des Abtasttheorems liefert die DFT fehlerfrei die Spektralwerte $M c_\mu$!

IDFT und inverse Fourier-Transformation:

Völlig entsprechende Überlegungen (im Vergleich zu den letzten Folien) liefern den Zusammenhang zwischen der IDFT und der inversen Fourier-Transformation.

Gegeben sei:

$$V(e^{j\Omega}), \Omega \in [0, 2\pi] \bullet \longleftrightarrow v(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega=0}^{2\pi} V(e^{j\Omega}) e^{j\Omega n} d\Omega.$$

Eine **numerische Integration** auf der Basis der spektralen Stützstellen $V(e^{j\frac{2\pi}{M}\mu}) = V_M(\mu)$ liefert folgendes Ergebnis:

$$v(n) \approx \frac{1}{M} \sum_{\mu=0}^{M-1} V_M(\mu) e^{j\frac{2\pi\mu}{M}n} = \tilde{v}(n).$$

Die Analyse ergibt

$$\tilde{v}(n) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} v(n + \lambda M).$$

Dies nennt man den **Überlagerungssatz der IDFT**. Es gilt $\tilde{v}(n) = v(n)$, wenn $v(n)$ endlich lang ist, mit $n \in \{0, 1, \dots, M - 1\}$!

Konvergenz und inverse Transformation – Teil 1

Konvergenzbedingungen – Teil 1:

Betrachten wir zunächst noch einmal die **Fourier-Transformationen** (kontinuierlich und diskret). Hier existierte die Transformation, wenn $|V(j\omega)|$ bzw. $|V(e^{j\Omega})|$ „existierte“. Dies bedeutete, dass der Spektralwert endlich sein musste, was erreicht wird, wenn der Betrag des Signals $|v(t)|$ **integrierbar** bzw. $|v(n)|$ **summierbar** ist. Dies war selbst bei einfachsten Signalen, z.B. der Sprungfunktion bzw. –folge oder dem Sinus, nicht erfüllt.

Überträgt man diese Überlegungen in den Laplace- bzw. z-Bereich, so ergibt sich für die Spektralwerte im ...

□ **Laplace-Bereich:**

$$|V(s)| = \left| \int_{t=-\infty}^{\infty} v(t) e^{-st} dt \right|$$

... Einzelbetragsabschätzung einsetzen...

$$\leq \int_{t=-\infty}^{\infty} |v(t)| |e^{-st}| dt.$$

□ **z-Bereich:**

$$|V(z)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} v(n) z^{-n} \right|$$

$$\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |v(n)| |z^{-n}|.$$

Konvergenzbedingungen – Teil 2:

Ergebnisse der letzten Folie im ...

□ **Laplace-Bereich:**

$$|V(s)| \leq \int_{t=-\infty}^{\infty} |v(t)| |e^{-st}| dt.$$

□ **z-Bereich:**

$$|V(z)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |v(n)| |z^{-n}|.$$

Im Unterschied zur Fourier-Transformation können die Faktoren $|e^{-st}|$ bzw. $|z^{-n}|$ hier nicht mit $|\dots| = 1$ vereinfacht werden. Sie können nun vielmehr so gewählt werden, dass $|V(j\omega)|$ bzw. $|V(e^{j\Omega})|$ existiert. Allerdings sind immer noch Bedingungen an $|v(t)|$ bzw. $|v(n)|$ zu stellen, damit das gelingt. Dies ist Gegenstand der nächsten Folien.

Konvergenz und inverse Transformation – Teil 3

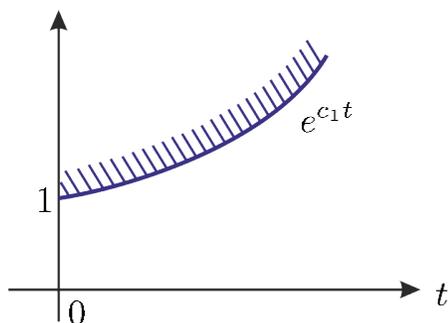
Konvergenzbedingungen – Teil 3:

Für die Abschätzung des Integrals bzw. der Summe unterteilen wir den Integrations- bzw. Summationsbereich in zwei Bereiche. Zunächst untersuchen wir die Existenz für positive Argumente:

□ **Laplace-Bereich:**

$$t \geq 0 : |v(t)| \leq c_0 e^{c_1 t}$$

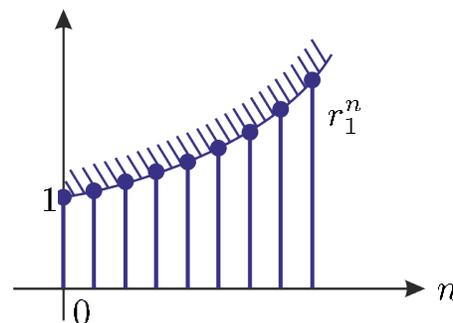
mit $c_0 > 0$, $c_1 \in \mathbb{R}$,
 $c_1 > 0$ erlaubt.



□ **z-Bereich:**

$$n \geq 0 : |v(n)| \leq c_0 r_1^n$$

mit $c_0 > 0$, $r_1 \in \mathbb{R}^+$,
 $r_1 > 1$ erlaubt.



$|v(t)|$ bzw. $|v(n)|$ lassen sich durch (ggf. wachsende!) Exponentielle majorisieren!

Konvergenz und inverse Transformation – Teil 4

Konvergenzbedingungen – Teil 4:

Mit dieser Majorisierung lässt sich die Größe der „*rechten Hälfte*“ des Integrals bzw. der Summe wie folgt abschätzen:

□ **Laplace-Bereich:**

$$|V(s)| \leq c_0 \int_{t=0}^{\infty} \underbrace{|e^{c_1 t}|}_{\geq 0} \underbrace{|e^{-\sigma t}|}_{\geq 0} \underbrace{|e^{-j\omega t}|}_{=1} dt = c_0 \int_{t=0}^{\infty} e^{(c_1 - \sigma)t} dt$$

... existiert, wenn $(c_1 - \sigma) < 0$.

□ **z-Bereich:**

$$|V(z)| \leq c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{|r_1^n|}_{\geq 0} \underbrace{\frac{1}{|z|^n}}_{=\rho^n} = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_1}{\rho}\right)^n$$

... existiert, wenn $\frac{r_1}{\rho} < 1$.

Zusammengefasst kann man sagen, dass für eine Wahl von s bzw. z aus den Bereichen

$$\sigma = \text{Re}\{s\} > c_1 \quad \text{bzw.} \quad \rho = |z| > r_1$$

die „rechten“ Hälften der Integrale bzw. Summen konvergieren!

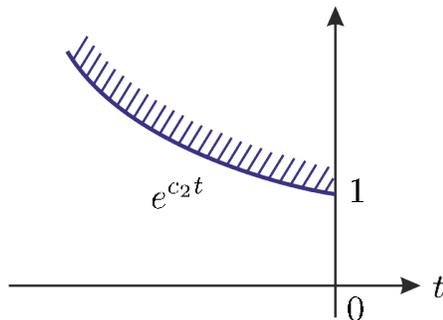
Konvergenzbedingungen – Teil 5:

Analog zu den Ergebnissen der letzten Folien, können wir auch die „linken Hälften“ des Integrals bzw. der Summe majorisieren. Es gilt im

□ **Laplace-Bereich:**

$$t < 0 : |v(t)| \leq c_0 e^{c_2 t}$$

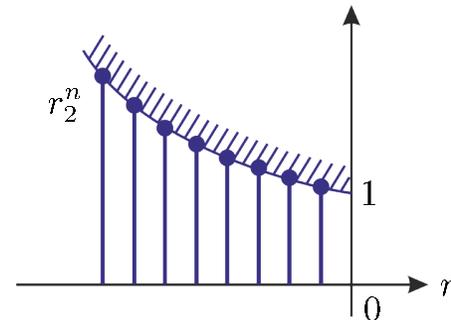
mit $c_0 > 0$, $c_2 \in \mathbb{R}$,
 $c_2 < 0$ erlaubt.



□ **z-Bereich:**

$$n < 0 : |v(n)| \leq c_0 r_2^n$$

mit $c_0 > 0$, $r_2 \in \mathbb{R}^+$,
 $r_2 < 1$ erlaubt.



$|v(t)|$ bzw. $|v(n)|$ lassen sich auch in diesem Bereich durch Exponentielle majorisieren!

Konvergenzbedingungen – Teil 6:

Mit dieser Majorisierung lässt sich nun analog die Größe der „linken Hälfte“ des Integrals bzw. der Summe wie folgt abschätzen:

□ **Laplace-Bereich:**

$$|V(s)| \leq c_0 \int_{t=-\infty}^0 \underbrace{|e^{c_2 t}|}_{\geq 0} \underbrace{|e^{-\sigma t}|}_{\geq 0} \underbrace{|e^{-j\omega t}|}_{=1} dt = c_0 \int_{t=-\infty}^0 e^{(c_2 - \sigma)t} dt = c_0 \int_{t=0}^{\infty} e^{-(c_2 - \sigma)t} dt$$

... existiert, wenn $-(c_2 - \sigma) < 0$.

□ **z-Bereich:**

$$|V(z)| \leq c_0 \sum_{n=-\infty}^{-1} \underbrace{|r_2^n|}_{\geq 0} \underbrace{\frac{1}{|z|^n}}_{=\rho^n} = c_0 \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{r_2}{\rho}\right)^n = c_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{r_2}\right)^n$$

... existiert, wenn $\frac{\rho}{r_2} < 1$.

Zusammengefasst kann man sagen, dass für eine Wahl von s bzw. z aus den Bereichen

$$\sigma = \text{Re}\{z\} < c_2 \quad \text{bzw.} \quad \rho = |z| < r_2$$

die „linken“ Hälften der Integrale bzw. Summen konvergieren!

Konvergenz und inverse Transformation – Teil 7

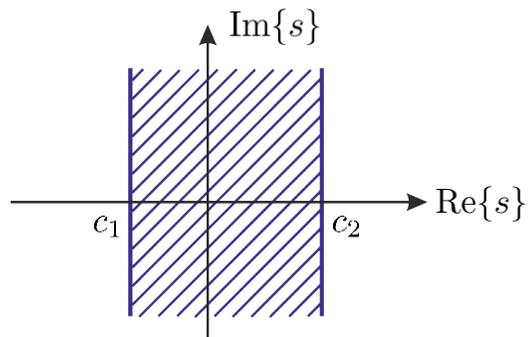
Konvergenzbedingungen – Teil 7:

Für allgemeine, d.h. zwei-seitige, Signale $v(t)$ bzw. $v(n)$, muss Konvergenz auf beiden Seiten gewährleistet sein. Es müssen also jeweils beide zuvor hergeleiteten Bedingungen erfüllt sein. Es muss daher gelten:

□ **Laplace-Bereich:**

$$c_1 < \sigma = \text{Re}\{s\} < c_2.$$

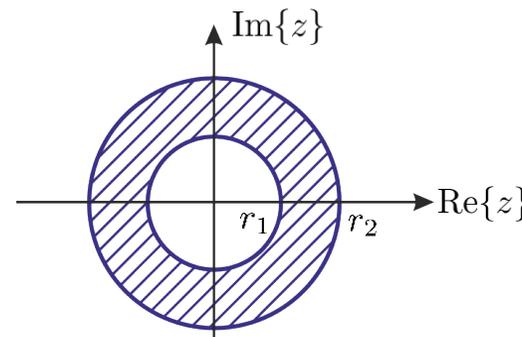
Dies entspricht einem sog. Konvergenzstreifen in der komplexen s -Ebene.



□ **z-Bereich:**

$$r_1 < \rho = |z| < r_2.$$

Dies entspricht einem sog. Konvergenzring in der komplexen z -Ebene.



Konvergenzbedingungen – Teil 8:

Bemerkungen:

- ❑ Für s -Werte bzw. z -Werte aus den zuvor genannten Konvergenzgebieten lassen sich die Laplace- bzw. die z -Transformation gemäß ihren Definitionsgleichungen bestimmen.
- ❑ Die **Umkehrintegrale** führen wieder auf die ursprünglichen Signale $v(t)$ bzw. $v(n)$, falls die **Integrationswege in den Konvergenzgebieten** liegen.
- ❑ Falls kein Konvergenzstreifen bzw. -ring existiert, d.h. falls gilt

$$c_1 > c_2 \quad \text{bzw.} \quad r_1 > r_2,$$

dann können zwar formal die links- bzw. rechtsseitigen Integrale

$$V_{\text{rechts}}(s) = \int_{t=0}^{\infty} v(t) e^{-st} dt \quad \text{mit } \operatorname{Re}\{s\} > c_1,$$

$$V_{\text{links}}(s) = \int_{t=-\infty}^0 v(t) e^{-st} dt \quad \text{mit } \operatorname{Re}\{s\} < c_2$$

Konvergenzbedingungen – Teil 9:

Bemerkungen (Fortsetzung):

bzw. Summationen

$$V_{\text{rechts}}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} v(n) z^{-n} \quad \text{mit } |z| > r_1,$$

$$V_{\text{links}}(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} v(n) z^{-n} \quad \text{mit } |z| < r_2$$

bestimmt werden. **Zusammengesetzte Übertragungsfunktionen** gemäß

$$\tilde{V}(s) = V_{\text{rechts}}(s) + V_{\text{links}}(s),$$

$$\tilde{V}(z) = V_{\text{rechts}}(z) + V_{\text{links}}(z)$$

stimmen dann aber **in keinem Punkt** der s - bzw. z -Ebene mit den ursprünglichen Definitionen überein.

Man gelangt mit den Umkehrfunktionen **nicht** wieder zu den ursprünglichen Signalen $v(t)$ bzw. $v(n)$ zurück.

Konvergenzbedingungen – Teil 10:

Bemerkungen (Fortsetzung):

- Von besonderem Interesse sind die beiden Sonderfälle, bei denen die imaginäre Achse der s -Ebene bzw. der Einheitskreis in der z -Ebene zum Konvergenzgebiet gehört. Hier gilt dann also

$$c_1 < 0 < c_2 \text{ bzw. } r_1 < 1 < r_2.$$

In diesen Fällen sind die Signale $v(t)$ bzw. $v(n)$ jeweils beidseitig durch fallende Exponentielle majorisierbar. Damit gilt dann im

- **Laplace-Bereich:**

- $|v(t)|$ ist integrierbar und
- es existiert die Fourier-Transformierte $\mathcal{F}\{v(t)\}$!

- **z -Bereich:**

- $|v(n)|$ ist summierbar und
- es existiert die Fourier-Transformierte $\mathcal{F}\{v(n)\}$!

Konvergenzbedingungen – Teil 11:

Bemerkungen (Fortsetzung):

- Nur in diesem letztgenannten Fall, also für

$$c_1 < 0 < c_2 \text{ bzw. } r_1 < 1 < r_2.$$

stimmen die Fourier-Transformierte und die Laplace-Transformierte auf der imaginären Achse bzw. die Fourier-Transformierte und die z-Transformierte auf dem Einheitskreis überein, d.h. es gilt:

$$V(s) \Big|_{s=j\omega} = V(j\omega) = \mathcal{F}\{v(t)\},$$
$$V(z) \Big|_{z=e^{j\Omega}} = V(e^{j\Omega}) = \mathcal{F}\{v(n)\}.$$

Wiederholung des Residuen-Satzes – Teil 1:

Der Residuensatz besagt, dass das Kurvenintegral längs einer geschlossenen Kurve lediglich vom Residuum in den Singularitäten im Innern der Kurve abhängt. Anstelle eines Kurvenintegrals muss man also nur die Residuen berechnen, was in vielen Fällen einfacher ist.

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_G f(z) dz = \sum_G \text{Res}\{f(z)\}.$$

Für die **Bestimmung der Residuen** gilt dabei:

- Hat $f(z)$ einen **einfachen Pol** bei $z = a$ (und liegt dieser im eingeschlossenen Integrationsgebiet), so kann das Residuum gemäß

$$\text{Res}\{f(z)\} = \lim_{z \rightarrow a} (z - a) f(z)$$

bestimmt werden.

- Für einen Pol **k -ter Ordnung** gilt

$$\text{Res}\{f(z)\} = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{k-1}}{(dz)^{k-1}} [(z-a)^k f(z)].$$

Konvergenz und inverse Transformation – Teil 13

Wiederholung des Residuen-Satzes – Teil 2:

Bemerkungen:

- Man beachte, dass als Funktion $f(z)$ nicht $H(z)$ sondern $H(z) z^{i-1}$ von Interesse ist.

Inverse z-Transformation – Teil 1:

Für die Bestimmung der **z-Rücktransformation** können zwei Fälle unterschieden werden:

- Falls das Konvergenzgebiet den Einheitskreis einschließt, d.h. falls

$$V(z) \Big|_{z=e^{j\Omega}} = V(e^{j\Omega}) = \mathcal{F}\{v(n)\}$$

gilt, dann kann das **Fourier-Umkehrintegral** dazu verwendet werden, die inverse z-Transformation zu bestimmen (dies setzt natürlich voraus, dass dieses Integral auch einfach zu lösen ist).

- Anderenfalls kann man das komplexe „Weg“-Integral mit Hilfe des **Residuen-Satzes** bestimmen:

$$\frac{1}{2\pi j} \oint f(z) dz = \sum \text{aller Residuen in den linksseitig vom Integrationsweg eingeschlossenen Singularitäten.}$$

Der „Integrationsweg“ ist hierbei ein einfach geschlossener Weg in der komplexen z-Ebene, der mathematisch positiv durchlaufen werden muss. Oftmals wird hier ein Kreis um $z = 0$ gewählt.

Inverse z-Transformation – Teil 2:

Für den (wichtigen) Fall von rationalen Transformationsergebnissen soll die Wegabhängigkeit des Integrals anhand eines **Beispiels** verdeutlicht werden. Wir gehen dazu von folgender Übertragungsfunktion aus:

$$H(z) = \frac{z}{z - z_1} + \frac{z}{z - z_2} \quad \leftarrow \text{Aus früheren Vorlesungen wissen wir dass eine solche Übertragungsfunktion (unter bestimmten Randbedingungen) zu folgender Impulsantwort gehört } h_i = (z_1^i + z_2^i) \gamma_{-1}(i).$$

Dabei soll gelten:

$$|z_1| < |z_2|.$$

Für die Bestimmung des Integrals

$$h_i = \frac{1}{2\pi j} \oint H(z) z^{i-1} dz$$

müssen nun für das o.g. Beispiel alle Residuen der (vom Weg eingeschlossenen) Singularitäten von

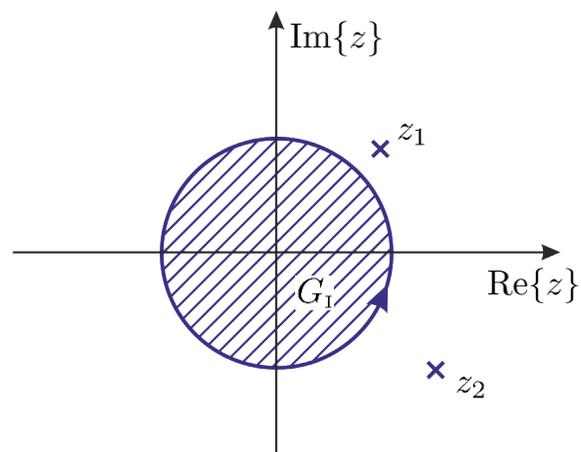
$$H(z) z^{i-1} = \left(\frac{z}{z - z_1} + \frac{z}{z - z_2} \right) z^{i-1} = \frac{z^i}{z - z_1} + \frac{z^i}{z - z_2}$$

bestimmt werden.

Inverse z-Transformation – Teil 3:

Bei der Bestimmung der Residuen unterscheiden wir nun drei Fälle:

- **Integrationsweg 1:** Kreis um $z = 0$ mit $|z| < |z_1| < |z_2|$.



Singularitäten für $i \geq 0$:

Zum einen bleibt z^i endlich und zum anderen liegen z_1 und z_2 nicht in G_I !

Es gibt also keine Singularitäten in G_I , d.h. es gilt

$$\sum \text{aller Residuen} = 0.$$

Folge:

$$h_i = 0 \quad \text{für} \quad i \geq 0.$$

Inverse z-Transformation – Teil 4:

□ **Integrationsweg 1** (Fortsetzung): Kreis um $z = 0$ mit $|z| < |z_1| < |z_2|$.

Singularitäten für $i < 0$:

$H(z) z^{i-1}$ erzeugt einen $|i|$ -**fachen Pol** in $z = 0$! z_1 und z_2 liegen nicht im Gebiet G_1 und erzeugen daher keine Singularitäten. Durch Partialbruchzerlegung erhält man folgende Umformung

$$\begin{aligned} H(z) z^{i-1} \Big|_{i < 0} &= \frac{1}{z^{|i|} \cdot (z - z_1)} + \frac{1}{z^{|i|} \cdot (z - z_2)} \\ &= \frac{B_1}{z - z_1} + \frac{B_2}{z - z_2} + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots + \frac{A_{|i|}}{z^{|i|}}. \end{aligned}$$

Das Residuum zur Singularität in $z = 0$ erhält man gemäß

$$A_1 = \lim_{z \rightarrow 0} \left\{ \frac{d^{|i|-1}}{dz^{|i|-1}} \left[H(z) z^{i-1} z^{|i|} \right] \frac{1}{(|i| - 1)!} \right\}.$$

Inverse z-Transformation – Teil 5:

□ **Integrationsweg 1** (Fortsetzung): Kreis um $z = 0$ mit $|z| < |z_1| < |z_2|$.

Singularitäten für $i < 0$ (Fortsetzung):

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \lim_{z \rightarrow 0} \left\{ \frac{d^{|i|-1}}{dz^{|i|-1}} \left[H(z) z^{i-1} z^{|i|} \right] \frac{1}{(|i|-1)!} \right\} \\
 &\quad \dots \text{Einsetzen der Übertragungsfunktion und Vereinfachen ...} \\
 &= \lim_{z \rightarrow 0} \left\{ \frac{d^{|i|-1}}{dz^{|i|-1}} \left[\frac{1}{z-z_1} + \frac{1}{z-z_2} \right] \frac{1}{(|i|-1)!} \right\} \\
 &\quad \dots |i|\text{-fach ableiten ...} \\
 &= \lim_{z \rightarrow 0} \left\{ (-1)^{|i|-1} (|i|-1)! \left[\frac{1}{(z-z_1)^{|i|}} + \frac{1}{(z-z_2)^{|i|}} \right] \frac{1}{(|i|-1)!} \right\} \\
 &\quad \dots \text{den Fakultätsterm kürzen ...} \\
 &= \lim_{z \rightarrow 0} \left\{ (-1)^{|i|-1} \left[\frac{1}{(z-z_1)^{|i|}} + \frac{1}{(z-z_2)^{|i|}} \right] \right\} \\
 &\quad \dots \text{Grenzübergang und das „Minuszeichen“ aus den Brüchen ausklammern ...} \\
 &= (-1)^{|i|-1} (-1)^{|i|} \left[\frac{1}{z_1^{|i|}} + \frac{1}{z_2^{|i|}} \right]
 \end{aligned}$$

Inverse z-Transformation – Teil 6:

□ **Integrationsweg 1** (Fortsetzung): Kreis um $z = 0$ mit $|z| < |z_1| < |z_2|$.

Singularitäten für $i < 0$ (Fortsetzung):

$$A_1 = (-1)^{|i|-1} (-1)^{|i|} \left[\frac{1}{z_1^{|i|}} + \frac{1}{z_2^{|i|}} \right]$$

... Zusammenfassen der Potenzen von (-1) und Verwendung, dass i negativ ist ...

$$= (-1) [z_1^i + z_2^i].$$

Damit ergibt sich insgesamt:

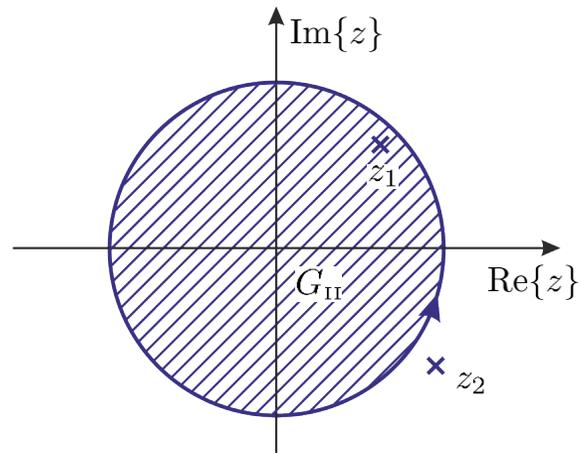
$$h_{i,1} = \sum_{G_1} \text{aller Residuen} = A_1 = -(z_1^i + z_2^i) \gamma_{-1}(-i - 1).$$



„Linksseitige“ Folge (nichtkausal)!

Inverse z-Transformation – Teil 7:

□ **Integrationsweg 2:** Kreis um $z = 0$ mit $|z_1| < |z| < |z_2|$.



Singularitäten für $i < 0$:

Es ergibt sich wieder ein $|i|$ -facher Pol bei $z = 0$.

Zusätzlich liegt nun noch z_1 im eingeschlossenen Integrationsgebiet G_{II} , d.h. es muss nun ein weiteres Residuum (B_1) berücksichtigt werden.

Das Residuum B_1 eines einfachen Pols bei $z = z_1$ kann gemäß

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \lim_{z \rightarrow z_1} \{ [H(z) z^{i-1} (z - z_1)] \} \\
 &\quad \dots \text{Einsetzen der Übertragungsfunktion} \dots \\
 &= \lim_{z \rightarrow z_1} \left\{ z^i + z^i \frac{z - z_1}{z - z_2} \right\} \\
 &\quad \dots \text{Grenzwertbildung} \dots \\
 &= z_1^i
 \end{aligned}$$

bestimmt werden.

Im Gegensatz zum mehrfachen Pol bei $z = 0$ gilt dies auch für nichtnegative i !

Inverse z-Transformation – Teil 8:

□ **Integrationsweg 2:** Kreis um $z = 0$ mit $|z_1| < |z| < |z_2|$.

Singularitäten für $i \geq 0$:

Zum einen bleibt z^i wieder endlich, zum anderen liegt z_1 im Integrationsgebiet G_{II} und muss daher berücksichtigt werden. Die Bestimmung erfolgt analog zum Fall $i < 0$ (vorige Folie).

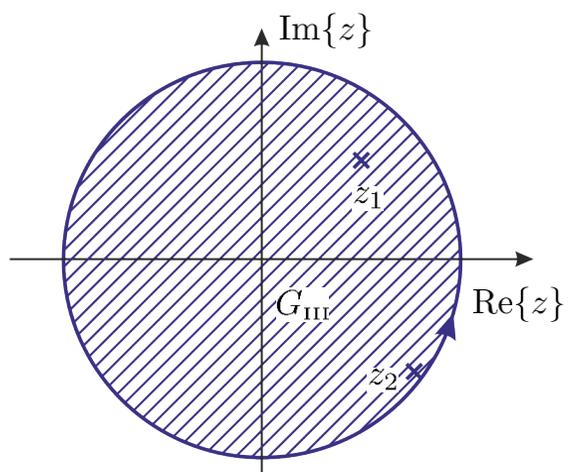
Damit ergibt sich insgesamt:

$$\begin{aligned}
 h_{i,II} &= \sum_{G_{II}} \text{aller Residuen} \\
 &= \begin{cases} -(z_1^i + z_2^i) + z_1^i = z_2^i, & \text{für } i < 0, \\ z_1^i, & \text{sonst,} \end{cases} \\
 &= -z_2^i \gamma_{-1}(-i - 1) + z_1^i \gamma_{-1}(i).
 \end{aligned}$$

← **Zweiseitige (nichtkausale) Folge (sowohl „links-“ als auch „rechtsseitig“)!**

Inverse z-Transformation – Teil 9:

□ **Integrationsweg 3:** Kreis um $z = 0$ mit $|z_1| < |z_2| < |z|$.



Singularitäten für $i < 0$:

Analog zu den vorigen beiden Integrationswegen gibt es wieder Singularitäten bei $z = 0$ und bei $z = z_1$.

Zusätzlich liegt nun auch z_2 im eingeschlossenen Gebiet G_{III} .

In Summe ergibt sich für die drei Residuen:

$$\begin{aligned} \sum_{G_{III}} \text{Res}\{H(z) z^{i-1}\} \Big|_{i < 0} \\ &= -(z_1^i + z_2^i) + z_1^i + z_2^i \\ &= 0. \end{aligned}$$

Für negative i kompensieren die beiden Residuen bei $z = z_1$ und bei $z = z_2$ gerade jenes bei $z = 0$!

Als Konsequenz ergibt sich nun eine kausale Folge!

Inverse z-Transformation – Teil 10:

□ **Integrationsweg 3** (Fortsetzung): Kreis um $z = 0$ mit $|z_1| < |z_2| < |z|$.

Singularitäten für $i \geq 0$:

Wieder analog zu den vorherigen Überlegungen gibt es für $i \geq 0$ nun noch zwei Singularitäten im eingeschlossenen Gebiet G_{III} : ein einfacher Pol bei $z = z_1$ und ein einfacher Pol bei $z = z_2$.

Für die Summe der Residuen gilt daher:

$$\sum_{G_{\text{III}}} \text{Res}\{H(z) z^{i-1}\} \Big|_{i \geq 0} = z_1^i + z_2^i.$$

Zusammengefasst (für alle i) ergibt sich:

$$h_{i,\text{III}} = [z_1^i + z_2^i] \gamma_{-1}(i).$$

„Rechtsseitige“ (und damit kausale) Folge
 bzw. Impulsantwort!

Inverse z-Transformation – Teil 11:

Zusammenfassung (Teil 1):

- ❑ Wir haben drei **verschiedene** Folgen bzw. Impulsantworten $h_{i,I}$, $h_{i,II}$ und $h_{i,III}$ aus dem **selben** $H(z)$ je nach **Integrationsweg** erhalten.
- ❑ Stellt man die umgekehrten Überlegungen an, d.h. transformiert man die erhaltenen Folgen in den z-Bereich, so ergibt sich:

- ❑ Erste Impulsantwort:

$$h_{i,I} \circ \bullet - \sum_{n=-\infty}^{-1} \left[\frac{z_1}{z}\right]^n - \sum_{n=-\infty}^{-1} \left[\frac{z_2}{z}\right]^n \quad \text{konv. gegen } H(z) \text{ für } |z| < |z_1| < |z_2|.$$

- ❑ Zweite Impulsantwort:

$$h_{i,II} \circ \bullet - \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{z_1}{z}\right]^n - \sum_{n=-\infty}^{-1} \left[\frac{z_2}{z}\right]^n \quad \text{konv. gegen } H(z) \text{ für } |z_1| < |z| < |z_2|.$$

- ❑ Dritte Impulsantwort:

$$h_{i,III} \circ \bullet - \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{z_1}{z}\right]^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{z_2}{z}\right]^n \quad \text{konv. gegen } H(z) \text{ für } |z_1| < |z_2| < |z|.$$

Inverse z-Transformation – Teil 12:**Zusammenfassung** (Teil 2):

- Die Kenntnis des **Konvergenzgebietes** ist **Voraussetzung** für die eindeutige Rücktransformation: Nur hier stimmen

$$H(z) \text{ und } \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_i z^i$$

überein!

- Zu einem gegebenen $H(z)$ kann man durch Wahl des Integrationsweges mit

$$|z| > \max \{ |z_{\text{Sing.}}| \}$$

stets eine **rechtsseitige**, mit

$$|z| < \min \{ |z_{\text{Sing.}}| \}$$

stets eine **linksseitige** Folge finden.

Inverse Laplace-Transformation – Teil 1:

Analog zu den Überlegungen der inversen z-Transformation kann auch für die **inverse Laplace-Transformation** der **Residuensatz** verwendet werden. Doch zuvor noch eine Überlegung zur Motivation der Berechnung der inversen Transformation.

Gehen wir zunächst von einem Signal aus, dessen Laplace-Transformierte wir kennen:

$$h(t) \circ \bullet H(s) = \int_{t=-\infty}^{\infty} h(t) e^{-(\sigma+j\omega)t} dt.$$

Fassen wir nun die Impulsantwort $h(t)$ und den Term $e^{-\sigma t}$ als neues Signal bzw. Impulsantwort zusammen, so ergibt sich eine **Fourier-Transformation**:

$$H(s) = \int_{t=-\infty}^{\infty} [h(t) e^{-\sigma t}] e^{-j\omega t} dt = \underbrace{\mathcal{F}\{h(t) e^{-\sigma t}\}}_{H_1(j\omega)}.$$

Inverse Laplace-Transformation – Teil 2:

Wenden wir nun die **Umkehrung der Fourier-Transformation** an, so erhalten wir

$$h(t) e^{-\sigma t} = \mathcal{F}^{-1}\{H_1(j\omega)\}.$$

Umgeformt und als **Grenzwertübergang** geschrieben ergibt sich schließlich:

$$h(t) = e^{\sigma t} \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} H_1(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-R}^R \underbrace{H_1(j\omega)}_{H(s)} \underbrace{e^{(\sigma+j\omega)t}}_{e^{st}} d\omega \right\}.$$

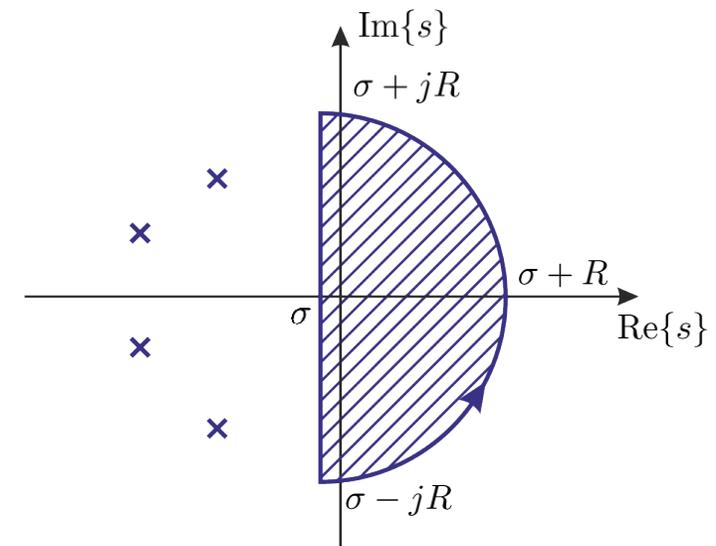
Durch die **Substitutionen** $\sigma + j\omega = s \rightarrow d\omega = ds/j$ und $\omega = \pm R \rightarrow s = \sigma \pm jR$ erhält man:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi j} \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \int_{s=\sigma-jR}^{\sigma+jR} H(s) e^{st} ds \right\}.$$

Inverse Laplace-Transformation – Teil 3:

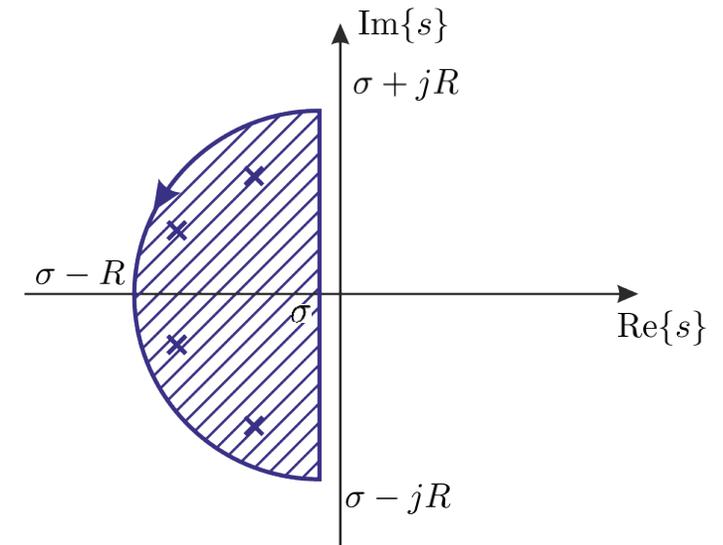
Dieses Integral kann man in vielen Fällen mit dem Residuensatz einfacher als auf die direkte Weise lösen. Dazu ist in vielen Fällen ein zweistufiger Ansatz möglich, der im Folgenden skizziert wird.

- ❑ Zunächst wird unterschieden, ob das Integral für **positive** oder **negative** t bestimmt werden soll.
- ❑ Für **negative** t wird der Integrationsweg zu einem **Halbkreis** erweitert (siehe Skizze). Durchläuft man dieses Gebiet wie skizziert, so entsteht ein **geschlossenes Gebiet**, was erlaubt, den **Residuensatz** anzuwenden. Bildet man dann den Grenzwert $R \rightarrow \infty$, so kann man zeigen, dass der neu hinzugekommene Teil des Integrationswegs keinen Beitrag zum Integral hat.



Inverse Laplace-Transformation – Teil 4:

- Für **positive** t wird der Integrationsweg ebenfalls zu einem **Halbkreis** erweitert, allerdings zur anderen Seite und mit umgekehrter Durchlaufrichtung (siehe Skizze). Durchläuft man dieses Gebiet wie skizziert, so entsteht auch wieder ein **geschlossenes Gebiet**, was erlaubt, den **Residuensatz** anzuwenden. Bildet man dann den Grenzwert, so kann man auch hier zeigen, dass der neu hinzugekommene Teil des Integrationswegs keinen Beitrag zum Integral hat.



Abschließende Zusammenfassung – Teil 1

Inhalt der Vorlesung „Signale und Systeme – Teil 1 und 2“:

- Signale und Systeme – Einführung
- Signale
- Spektraldarstellungen determinierter Signale
- Lineare Systeme
- Modulation
- Systembeschreibung im Zustandsraum
- Stochastische Signale und ihre Spektren
- Reaktion linearer Systeme auf stationäre stochastische Signale
- Idealisierte Systeme
- Ergänzungen zu Spektraltransformationen

Und zum Schluss:

Viel Erfolg und Spaß bei der Anwendung des erlernten Wissens – sowohl in den weiteren Vorlesungen, in den Praktika, in den Bachelor- oder Masterarbeiten als auch in Ihrem späteren Berufsleben.



Ihr DSS-Team