

# Signale und Systeme – Stochastische Signale und ihre Spektren

**Gerhard Schmidt**

Christian-Albrechts-Universität zu Kiel

Technische Fakultät

Elektrotechnik und Informationstechnik

Digitale Signalverarbeitung und Systemtheorie



## Gesamtübersicht

- ❑ Signale und Systeme – Einführung
- ❑ Signale
- ❑ Spektraldarstellungen determinierter Signale
- ❑ Lineare Systeme
- ❑ Modulation
- ❑ Systembeschreibung im Zustandsraum
- ❑ **Stochastische Signale und ihre Spektren**
  - ❑ **Beschreibung stochastischer Signale**
  - ❑ **Leistungsdichtespektrum**
  - ❑ **Zufallsprozess**
- ❑ Reaktion linearer Systeme auf stationäre stochastische Signale
- ❑ Idealisierte Systeme
- ❑ Ergänzungen zu Spektraltransformationen



## Beschreibung stochastischer Signale – Teil 1

### *Hintergrund:*

Bisher haben wir Signale der beiden „Formen“

$$v(t) \in \mathbb{C}, \quad \text{mit } t \in \mathbb{R} \text{ kontinuierlich,}$$

$$v(n) \in \mathbb{C}, \quad \text{mit } n \in \mathbb{Z} \text{ diskret}$$

behandelt. Hierbei konnten wir einen funktionalen Zusammenhang  $(t, n \rightarrow v)$  angeben.

In diesem Fall bezeichnet man die Signale  $v(t)$  bzw.  $v(n)$  als **determiniert**.

Kann ein solcher Zusammenhang nicht (ohne weiteres) angegeben werden, so bezeichnet man die Signale als **stochastisch**.

Für stochastische Signale kann man nur noch Wahrscheinlichkeitsaussagen (z.B. über den zu erwartenden Amplitudenbereich oder über das mittlere zeitliche Verhalten) treffen.

Für die Einführung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes und der zugehörigen Theoreme sei auf die Mathematikvorlesungen verwiesen. Wir werden hier nur die später benötigten Zusammenhänge einführen.

*Durch die Einführung von stochastischen Signalen bzw. Zufallsprozessen können viele technisch vorkommende Signale realitätsnäher als mit determinierten Signalen beschrieben werden.*

### *Motivation der verwendeten stochastischen Kenngrößen:*

Bisher haben wir **determinierte Signale**  $v(t)$  bzw.  $v(n)$  betrachtet. Hierbei haben wir entweder

- den **Wert des Signals**, d.h. die komplexe Amplitude in Abhängigkeit von  $t$  bzw.  $n$  betrachtet oder
- uns für die Änderung oder **Ähnlichkeit** in  $t$  und  $t + \tau$  bzw.  $n$  und  $n + \kappa$  interessiert (Periodizität).

Den Signalverlauf konnten wir durch überlagerte Elementarsignale, z.B.  $V e^{j\omega t}$ ,  $V e^{st}$ ,  $V e^{j\Omega n}$  oder  $V z^n$  darstellen. Dies führte auf das Spektrum eines Signals – grob konnte hier der Zusammenhang

„**Schnelle Änderungen**  $\implies$  **hohe Frequenzen**“ (und umgekehrt)

hergestellt werden.

### *Wunsch:*

Es besteht nun der Wunsch, stochastische Signale auf ähnliche Weise zu beschreiben.

### *Stochastische Beschreibungsgrößen:*

In Anlehnung an die Beschreibung von deterministischen Signalen verwendet man für stochastische Signale

- ❑ die **Wahrscheinlichkeitsverteilung** bzw. **–dichte** der Signalamplituden
- ❑ sowie Ähnlichkeitsbeschreibungen in Form von **Korrelationsfunktionen** bzw. den dazugehörigen **Spektren**.

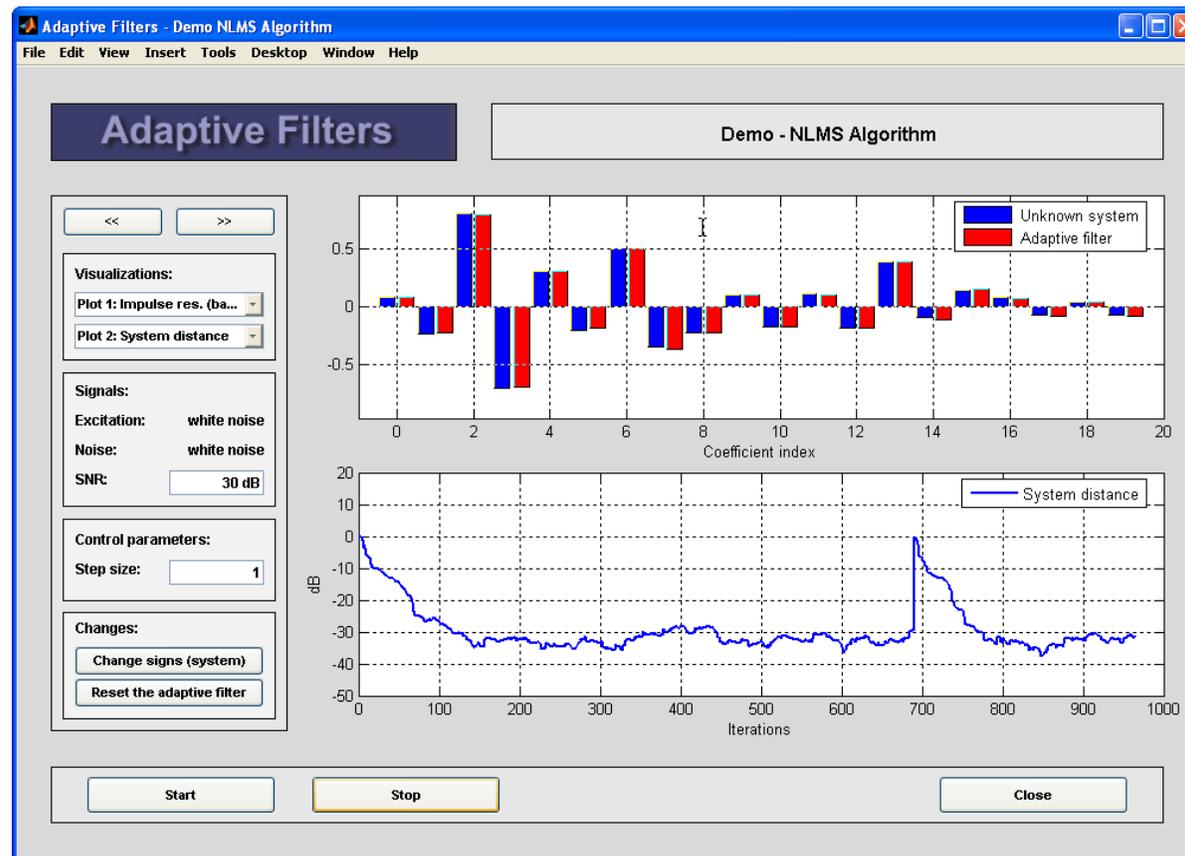
Im Weiteren werden wir nun

- ❑ primäre stochastische Kenngrößen definieren,
- ❑ sekundäre stochastische Kenngrößen definieren,
- ❑ Beispiele dazu einführen und
- ❑ zugehörige Spektren definieren (und auch dazu Beispiele einführen).

# Stochastische Signale und ihre Spektren

Beispiel für eine „stochastische“ Optimierung

*Minimierung des mittleren quadratischen Fehlers:*



### Primäre stochastische Kenngrößen – Teil 1:

Wahrscheinlichkeitsverteilung:

$$F_v(x, t) = P(v(t) \leq x),$$

$$F_v(x, n) = P(v(n) \leq x).$$



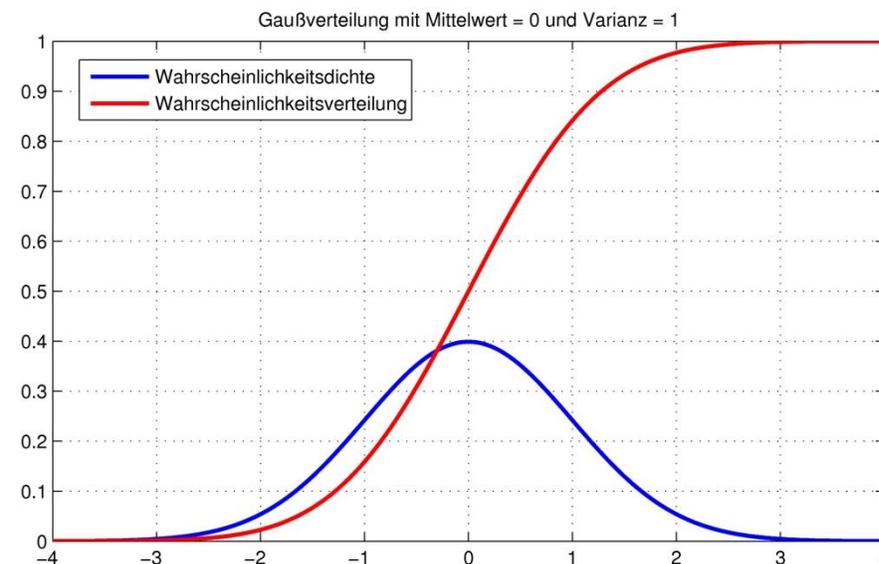
**Bedeutung: Wahrscheinlichkeit, dass  $v(\dots)$  kleiner oder gleich der Schwelle  $x$  ist. Dies ist reellwertig definiert – für komplexe Größen muss eine getrennte Betrachtung für Real- und Imaginärteil geschehen (bzw. für Betrag und Phase).**

Daraus abgeleitet ergibt sich die Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$f_v(x, t) = \frac{\partial F_v(x, t)}{\partial x},$$

$$f_v(x, n) = \frac{\partial F_v(x, n)}{\partial x}.$$

**Bei quantisierten Signalen (also bei digitalen Signalen) ist  $v_q(\dots)$  wertdiskret, d.h. die Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion enthält Sprünge (daraus entstehen Dirac-Impulse in der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion).**



### Primäre stochastische Kenngrößen – Teil 2:

Die zuvor genannten eindimensionalen Beschreibungen können auch für mehrdimensionale Signale und unterschiedliche Zeitpunkte erweitert werden. Insbesondere ist dabei der zweidimensionale Fall von Interesse.

Hier gilt für die **Verbund-Wahrscheinlichkeitsverteilung**:

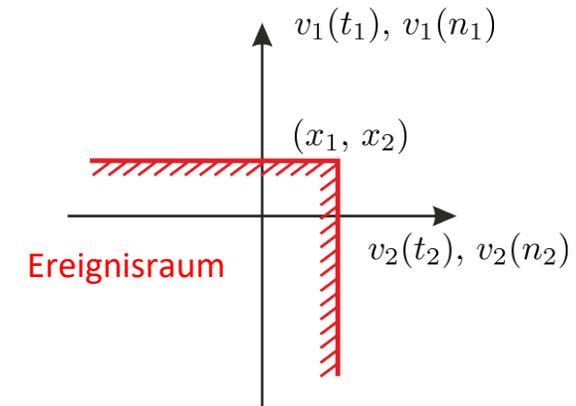
$$F_{v_1 v_2}(x_1, x_2, t_1, t_2) = P\left((v_1(t_1) \leq x_1) \wedge (v_2(t_2) \leq x_2)\right),$$

$$F_{v_1 v_2}(x_1, x_2, n_1, n_2) = P\left((v_1(n_1) \leq x_1) \wedge (v_2(n_2) \leq x_2)\right).$$

Entsprechend gilt dann für die **Verbund-Wahrscheinlichkeitsdichte**:

$$f_{v_1 v_2}(x_1, x_2, t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F_{v_1 v_2}(x_1, x_2, t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2},$$

$$f_{v_1 v_2}(x_1, x_2, n_1, n_2) = \frac{\partial^2 F_{v_1 v_2}(x_1, x_2, n_1, n_2)}{\partial x_1 \partial x_2}.$$



**Primäre stochastische Kenngrößen – Teil 3:**

Einen (wichtigen) Sonderfall bilden stochastische Signale (bzw. Zufallsprozesse), bei denen die Wahrscheinlichkeit in allen Beobachtungszeitpunkten  $t$  bzw.  $n$  gleich ist, d.h. es gilt für den eindimensionalen Fall:

$$F_v(x, t) = F_v(x), \quad F_v(x, n) = F_v(x), \quad f_v(x, t) = f_v(x), \quad f_v(x, n) = f_v(x).$$

Man nennt solche Zufallsprozesse **stationär**. Allgemein (d.h. dann auch für den mehrdimensionalen Fall) heißen Zufallsprozesse **verbunden stationär**, wenn ihre gemeinsamen statistischen Eigenschaften invariant gegenüber Verschiebungen der Zeit sind.

Für den zweidimensionalen Fall hängen die Verbund-Wahrscheinlichkeitsverteilung und die Verbund-Wahrscheinlichkeitsdichte dann nur noch von der Differenz der Zeitargumente ab:

$$\begin{aligned} F_{v_1 v_2}(x_1, x_2, t_1, t_2) &= F_{v_1 v_2}(x_1, x_2, t_2 - t_1), \\ F_{v_1 v_2}(x_1, x_2, n_1, n_2) &= F_{v_1 v_2}(x_1, x_2, n_2 - n_1), \\ f_{v_1 v_2}(x_1, x_2, t_1, t_2) &= f_{v_1 v_2}(x_1, x_2, t_2 - t_1), \\ f_{v_1 v_2}(x_1, x_2, n_1, n_2) &= f_{v_1 v_2}(x_1, x_2, n_2 - n_1). \end{aligned}$$

**Primäre stochastische Kenngrößen – Teil 4:**

Über sog. **Randdichten** bzw. **Randverteilungen** kann man den Zusammenhang zwischen ein- und zweidimensionalen Wahrscheinlichkeitsverteilungen herstellen. Eine Randdichte ist dabei wie folgt definiert:

$$f_{v_1}(x_1) = \int_{x_2=-\infty}^{\infty} f_{v_1 v_2}(x_1, x_2) dx_2.$$

Die Randverteilung ergibt sich durch Integration

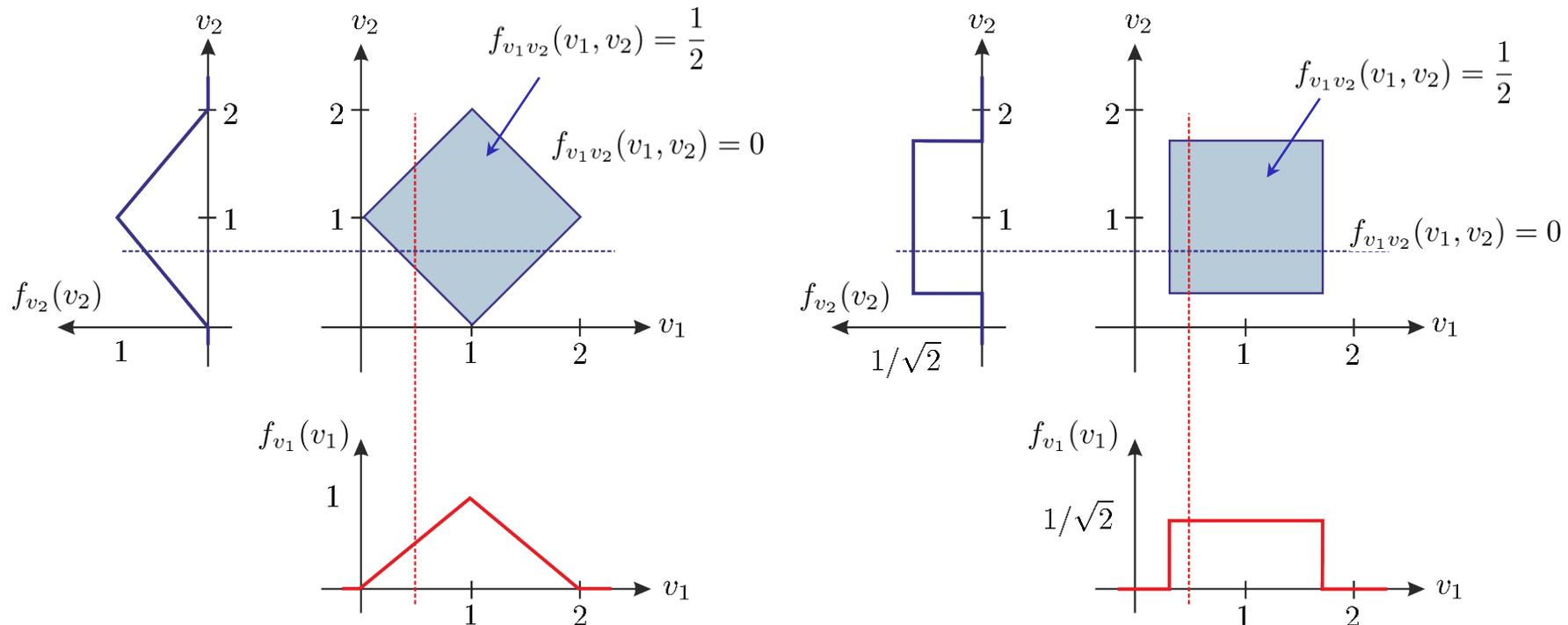
$$F_{v_1}(x_1) = \int_{u=-\infty}^{x_1} f_{v_1}(u) du.$$

Ganz allgemein wird durch die Berechnung von Randdichten jeweils ein Signal aus der Wahrscheinlichkeitsdichte bzw. der Wahrscheinlichkeitsverteilung „entfernt“.

Für **statistische unabhängige**, stationäre, bivariate Zufallsprozesse gilt:

$$f_{v_1 v_2}(x_1, x_2) = f_{v_1}(x_1) \cdot f_{v_2}(x_2).$$

### Primäre stochastische Kenngrößen – Teil 5:



**Was können Sie über die statistische Unabhängigkeit der beiden zwei-dimensionalen Zufallsprozesse bzw. -variablen aussagen?**

### *Sekundäre stochastische Kenngrößen – Teil 1:*

Oft ist eine (an sich wünschenswerte, weil vollständige) Beschreibung durch eine (im Allgemeinen mehrdimensionale) Wahrscheinlichkeitsdichte nicht verfügbar oder auch nicht erforderlich. Dann verwendet man Teilbeschreibungen der Prozesse durch Kenngrößen, die mit der Wahrscheinlichkeitsdichte zusammenhängen oder gar Parameter davon sind. Der Kernbegriff sind hier sog. **Erwartungswerte**.

Allgemeine Definitionen:

- Für den Erwartungswert einer Funktion eines univariaten Zufallsprozesses gilt:

$$E\{g(v(t))\} = \int_{x=-\infty}^{\infty} g(x) f_v(x, t) dx.$$

*Die Berechnung für zeitdiskrete Zufallsprozesse geschieht vollkommen analog.*

- Entsprechend gilt für bivariate Zufallsprozesse:

$$E\{g(v_1(t_1), v_2(t_2))\} = \int_{x_1=-\infty}^{\infty} \int_{x_2=-\infty}^{\infty} g(x_1, x_2) f_{v_1 v_2}(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2.$$

### Sekundäre stochastische Kenngrößen – Teil 2:

Anmerkungen:

- Offensichtlich ist der Erwartungswertoperator linear bezüglich  $g(\dots)$  (nicht notwendigerweise bezüglich  $v_1$  bzw.  $v_2$  – auch die Funktion kann natürlich nichtlinear sein).
- Für stationäre Zufallsprozesse gilt:

$$E\{g(v(t))\} = \int_{x=-\infty}^{\infty} g(x) f_v(x) dx,$$

↗ **Hängt nicht von  $t$  ab!**

$$E\{g(v_1(t_1), v_2(t_2))\} = \int_{x_1=-\infty}^{\infty} \int_{x_2=-\infty}^{\infty} g(x_1, x_2) f_{v_1 v_2}(x_1, x_2, t_2 - t_1) dx_1 dx_2.$$

↘ **Hängt nur von  $t_2 - t_1$  ab!**

### *Sekundäre stochastische Kenngrößen – Teil 3:*

Spezielle Erwartungswerte:

□ Für den eindimensionalen Fall sind folgende Erwartungswerte von besonderer Bedeutung:

□ **Scharmittelwert** bzw. **erstes Moment**:

$$E\{v(\dots)\} = \int_{x=-\infty}^{\infty} x f_v(x, \dots) dx = m_v(\dots) = m_v^{(1)}(\dots).$$

*Die drei Punkte „...“ stehen entweder für  $t$  oder für  $n$ .*

Anschauliche Deutung:

Mittelung unter Beachtung der Häufigkeit, ähnlich wie bei der Berechnung einer Durchschnittsnote.

### Beispiel:

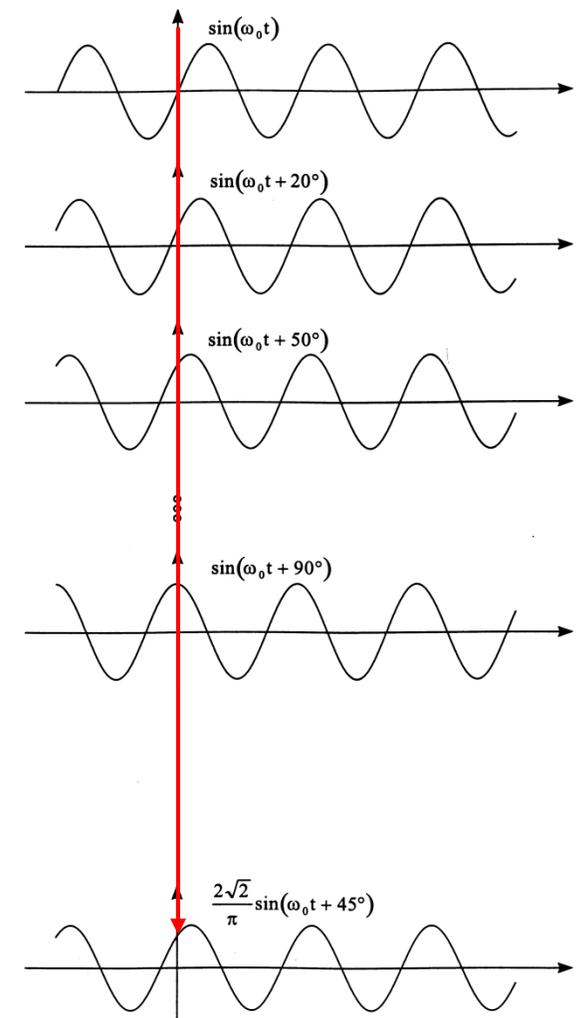
Zufallsprozess mit sinusförmigen Musterfunktionen und zufälliger Phase:

$$v(t) = \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

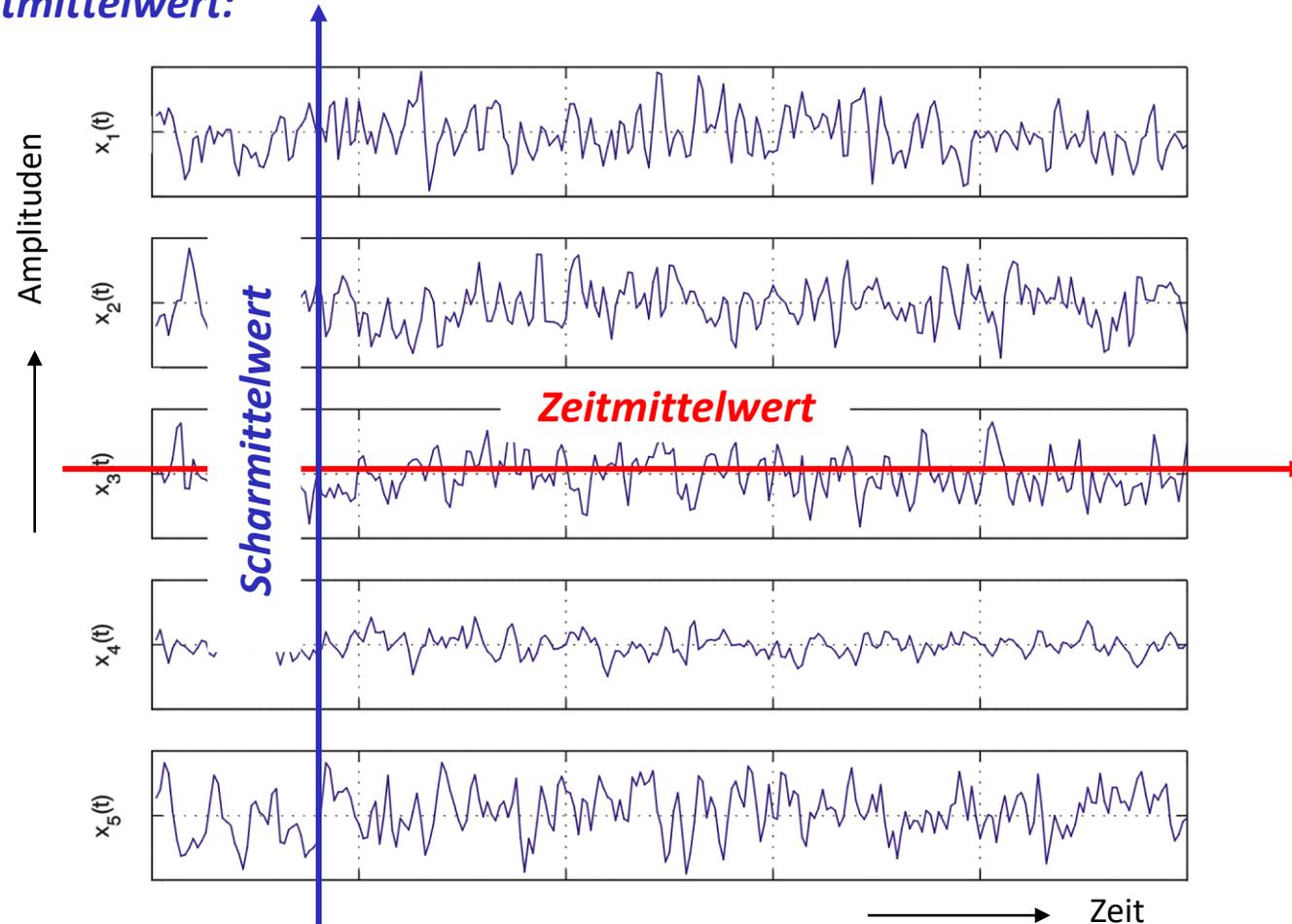
$$f_\varphi(\varphi) = \begin{cases} 2/\pi, & \text{für } 0 \leq \varphi \leq \pi/2, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

**Bestimmen Sie den linearen Mittelwert!**

*Zunächst eigener Versuch, dann  
gemeinsame Lösung an der Tafel.*



### Schmitttelwert versus Zeitmittelwert:



**Sekundäre stochastische Kenngrößen – Teil 4:**

Spezielle Erwartungswerte (Fortsetzung):

□ **Quadratischer Mittelwert** bzw. **zweites Moment**:

$$E\{v^2(\dots)\} = \int_{x=-\infty}^{\infty} x^2 f_v(x, \dots) dx = m_v^{(2)}(\dots).$$

□ **Varianz** bzw. **zweites zentrales Moment**:

$$E\{(v(\dots) - m_v)^2\} = \int_{x=-\infty}^{\infty} (x - m_v)^2 f_v(x, \dots) dx = \sigma_v^2(\dots).$$

*Anschaulich kann man  $m_v$  als den Gleichanteil eines Signals betrachten. Das Quadrat davon ist dann die „Gleichanteilsleistung“.  $\sigma_v^2$  beschreibt dann die „Wechselanteilsleistung“. Das zweite Moment  $m_v^{(2)}$  steht dann für die Gesamtleistung, also die Summe aus beiden (siehe nächste Seite). Für diese Überlegung muss man Ergodizität (Erklärung später) voraussetzen!*

**Sekundäre stochastische Kenngrößen – Teil 5:**

Spezielle Erwartungswerte (Fortsetzung):

- Zusammenhang zwischen zweitem Moment und zweitem zentralen Moment:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left\{(v(t) - m_v(t))^2\right\} &= \mathbb{E}\{v^2(t) - 2v(t)m_v(t) + m_v^2(t)\} \\ &= \underbrace{\mathbb{E}\{v^2(t)\}}_{=m_v^{(2)}(t)} - 2m_v(t) \underbrace{\mathbb{E}\{v(t)\}}_{=m_v(t)} + m_v^2(t) \\ &= m_v^{(2)}(t) - m_v^2(t) \\ &\implies m_v^{(2)}(t) = \sigma_v^2(t) + m_v^2(t). \end{aligned}$$

**Anmerkungen:** Für den zeitdiskreten Fall geschieht die Herleitung völlig analog.

**Weiterhin ist zu beachten, dass die bisherigen Überlegungen zunächst nur für reellwertige Größen angestellt wurden. (Einfache) Erweiterungen für komplexe Größen kommen im Anschluss.**

### Sekundäre stochastische Kenngrößen – Teil 6:

Spezielle Erwartungswerte (Fortsetzung):

□ Für den **zweidimensionalen** Fall sind folgende (Produkt-) Erwartungswerte von besonderer Bedeutung:

□ **Kreuzkorrelationsfunktion** bzw. **-folge**:

$$E\{v_1(t) v_2(t + \tau)\} = \int_{v_1=-\infty}^{\infty} \int_{v_2=-\infty}^{\infty} v_1 v_2 f_{v_1 v_2}(v_1, v_2, \tau) dv_1 dv_2 = s_{v_1 v_2}(\tau),$$

*kontinuierlich*

$$E\{v_1(n) v_2(n + \kappa)\} = \int_{v_1=-\infty}^{\infty} \int_{v_2=-\infty}^{\infty} v_1 v_2 f_{v_1 v_2}(v_1, v_2, \kappa) dv_1 dv_2 = s_{v_1 v_2}(\kappa).$$

*diskret*

*Für die oben beschriebene Definition wurde Stationarität vorausgesetzt (dies geht natürlich auch ohne diese Annahme, dann aber mit zwei Zeitargumenten).*

### Sekundäre stochastische Kenngrößen – Teil 7:

Spezielle Erwartungswerte (Fortsetzung):

- Analog zur Erweiterung von Momenten in zentrale Momente werden die **Kreuzkovarianzfunktion** bzw. **-folge** definiert:

$$\begin{aligned}
 & E\left\{ (v_1(t) - m_{v_1}) (v_2(t + \tau) - m_{v_2}) \right\} \\
 &= \int_{v_1=-\infty}^{\infty} \int_{v_2=-\infty}^{\infty} (v_1 - m_{v_1}) (v_2 - m_{v_2}) f_{v_1 v_2}(v_1, v_2, \tau) dv_1 dv_2 = \psi_{v_1 v_2}(\tau),
 \end{aligned}$$

*kontinuierlich*

$$\begin{aligned}
 & E\left\{ (v_1(n) - m_{v_1}) (v_2(n + \kappa) - m_{v_2}) \right\} \\
 &= \int_{v_1=-\infty}^{\infty} \int_{v_2=-\infty}^{\infty} (v_1 - m_{v_1}) (v_2 - m_{v_2}) f_{v_1 v_2}(v_1, v_2, \kappa) dv_1 dv_2 = \psi_{v_1 v_2}(\kappa).
 \end{aligned}$$

*diskret*

**Auch hier kann auf einfache Weise folgender Zusammenhang hergestellt werden:**  $\psi_{v_1 v_2}(\dots) = s_{v_1 v_2}(\dots) - m_{v_1} m_{v_2}$  !

**Sekundäre stochastische Kenngrößen – Teil 8:**

Spezielle Erwartungswerte (Fortsetzung):

- Bedeutung von Kreuzkorrelationsfunktionen bzw. Kreuzkovarianzfunktionen (bzw.–folgen):  
Man verrechnet hiermit den (Schar-) Mittelwert des Produktes zweier Signale zu den Zeitpunkten  $t$  und  $t + \tau$  bzw.  $n$  und  $n + \kappa$ . Wenn ...
  - die Signale hier „oft ähnlich“ sind, dann ist das Produkt „oft positiv“, das Mittel daraus dann auch,
  - die Signale  $v_1(\dots)$  und  $-v_2(\dots)$  hier „oft ähnlich“ sind, dann ist das Produkt „oft negativ“, das Mittel dieser Produkte dann auch,
  - beliebige Signalwerte „zufällig“ aufeinandertreffen, dann mitteln sich positive und negative Produkte „heraus“, das Produkt ist im Mittel Null.

Zusammenfassend kann man sagen, dass **Korrelationen und Kovarianzen** die **Ähnlichkeit zweier Signale im Abstand  $\tau$  bzw.  $\kappa$  zueinander beschreiben**.

**Sekundäre stochastische Kenngrößen – Teil 9:**

Spezielle Erwartungswerte (Fortsetzung):

- Betrachtung eines einzelnen Signals, d.h. es gilt:  $v_1(\dots) = v_2(\dots) = v(\dots)$ . In diesem Fall wird die Ähnlichkeit eines Signals zu sich selbst bei verschiedenen Versätzen  $\tau$  bzw.  $\kappa$  beschrieben.

- Die Korrelationsfunktion bzw. -folge wird nun zur **Autokorrelationsfunktion** bzw. **-folge**. Sie sind wie folgt definiert:

$$E\{v(t) v(t + \tau)\} = \int_{v_1=-\infty}^{\infty} \int_{v_2=-\infty}^{\infty} v_1 v_2 f_{vv}(v_1, v_2, \tau) dv_1 dv_2 = s_{vv}(\tau),$$

$$E\{v(n) v(n + \kappa)\} = \int_{v_1=-\infty}^{\infty} \int_{v_2=-\infty}^{\infty} v_1 v_2 f_{vv}(v_1, v_2, \kappa) dv_1 dv_2 = s_{vv}(\kappa).$$

- Für die **Autokovarianzfunktion** bzw. **-folge** gilt wieder entsprechend:

$$\psi_{vv}(\dots) = s_{vv}(\dots) - m_v^2.$$

**Sekundäre stochastische Kenngrößen – Teil 10:**

Notwendige Änderungen zur Erfassung komplexer Signale  $v(t) = v_{\text{re}}(t) + j v_{\text{im}}(t) \in \mathbb{C}$  :

- Für den **linearen Mittelwert** gilt:

$$m_v(t) = m_{v_{\text{re}}}(t) + j m_{v_{\text{im}}}(t).$$

- Der **quadratische Mittelwert** wird für komplexe Signale wie folgt definiert:

$$m_v^{(2)}(t) = \mathbb{E}\{v(t) v^*(t)\}.$$

- Für die **Varianz** eines komplexen Signals gilt:

$$\sigma_v^2(t) = \mathbb{E}\left\{[v(t) - m_v(t)][v^*(t) - m_v^*(t)]\right\}.$$

Für die oben genannten Größen sind nun zweidimensionale Verbunddichten für  $v_{\text{re}}(t)$  bzw.  $v_{\text{im}}(t)$  notwendig.

*Für den zeitdiskreten Fall gibt es natürlich entsprechende Definitionen.*

**Sekundäre stochastische Kenngrößen – Teil 11:**

Auch die Korrelationsgrößen sind für komplexe Signale definiert:

- Für die **Kreuzkorrelationsfunktion** gilt:

$$s_{v_1 v_2}(\tau) = \mathbb{E}\{v_1(t) v_2^*(t + \tau)\}.$$

- Die **Autokorrelationsfunktion** wird für komplexe Signale wie folgt definiert:

$$s_{vv}(\tau) = \mathbb{E}\{v(t) v^*(t + \tau)\}.$$

Für die oben genannten Größen sind nun vierdimensionale Verbunddichten (für die Signalanteile  $v_{1,\text{re}}(t)$ ,  $v_{1,\text{im}}(t)$ ,  $v_{2,\text{re}}(t)$  bzw.  $v_{2,\text{im}}(t)$ ) notwendig.

*Auch hier gibt es für den zeitdiskreten Fall natürlich entsprechende Definitionen. Gleiches gilt für den instationären Fall.*

**Sekundäre stochastische Kenngrößen – Teil 12:**

Spezielle Werte von Autokorrelationsfunktionen bzw. –folgen und Autokovarianzfunktionen bzw. –folgen:

- Autokorrelation beim Versatz Null:

$$s_{vv}(0) = \mathbb{E}\{v(t)v^*(t+0)\} = m_v^{(2)}.$$

- Autokovarianzfunktion beim Versatz Null:

$$\psi_{vv}(0) = \mathbb{E}\left\{[v(t) - m_v(t)][v^*(t+0) - m_v^*(t+0)]\right\} = \sigma_v^2.$$

*Wieder gibt es für den zeitdiskreten Fall entsprechende Definitionen.*

Weiterhin kann man zeigen (siehe nächste Folie bzw. den dazugehörigen Tafelanschrieb), dass die Korrelationsgrößen im stationären Fall durch den Wert bei Null nach oben begrenzt sind:

$$\begin{aligned} s_{vv}(0) &\geq |s_{vv}(\tau)| \quad \forall \tau, & s_{vv}(0) &\geq |s_{vv}(\kappa)| \quad \forall \kappa, \\ \psi_{vv}(0) &\geq |\psi_{vv}(\tau)| \quad \forall \tau, & \psi_{vv}(0) &\geq |\psi_{vv}(\kappa)| \quad \forall \kappa. \end{aligned}$$

## Beschreibung stochastischer Signale – Teil 23

### *Sekundäre stochastische Kenngrößen – Teil 13:*

Herleitung der Maximalgrenzen der Autokorrelations- bzw. Autokovarianzgrößen an der Tafel ...

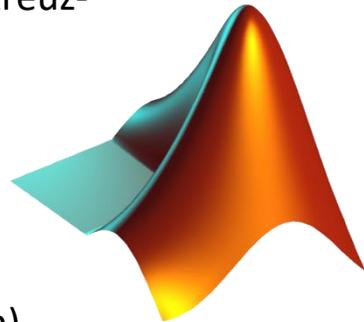
*Die Autokorrelation und die Autokovarianz beschreiben die Ähnlichkeit des Signals  $v(\dots)$  mit sich selbst nach einer Verschiebung um  $\tau$  bzw.  $\kappa$ . Die Ähnlichkeit ist natürlich maximal für  $\tau = 0$  bzw.  $\kappa = 0$ , weil dann identische Signale miteinander verglichen werden.*

### *Sekundäre stochastische Kenngrößen – Teil 14:*

Matlab-Beispiel zur Anwendung der Kreuz- bzw. der Autokorrelationsfunktion:

Ortung einer akustischen Quelle mit  
zwei Ohrmikrofonen (Kreuz-  
korrelation)

Unterscheidung von  
Frauen und Männern  
anhand deren Sprach-  
signale (Autokorrelation)



**Sekundäre stochastische Kenngrößen – Teil 15:**

**Statistische Unabhängigkeit** zwischen den Zufallsprozessen  $v_1(\dots)$  und  $v_2(\dots)$  liegt vor, wenn die Verbundwahrscheinlichkeitsdichte separierbar ist.

□ Für kontinuierliche Zufallsprozesse muss dann gelten:

□ Allgemein:  $f_{v_1 v_2}(v_1, v_2, t_1, t_2) = f_{v_1}(v_1, t_1) f_{v_2}(v_2, t_2).$

□ Bei Stationarität:  $f_{v_1 v_2}(v_1, v_2, \tau) = f_{v_1}(v_1) f_{v_2}(v_2).$

□ Für diskrete Zufallsprozesse:

□ Allgemein:  $f_{v_1 v_2}(v_1, v_2, n_1, n_2) = f_{v_1}(v_1, n_1) f_{v_2}(v_2, n_2).$

□ Bei Stationarität:  $f_{v_1 v_2}(v_1, v_2, \kappa) = f_{v_1}(v_1) f_{v_2}(v_2).$

**Sekundäre stochastische Kenngrößen – Teil 16:**

Aus statistischer Unabhängigkeit ergeben sich Folgen für Kreuzkorrelation und Kreuzkovarianz.

Durch Einsetzen der Bedingung für statistische Unabhängigkeit in die Definition der Kreuzkorrelationsfunktion ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 s_{v_1 v_2}(t_1, t_2) &= \int_{v_1=-\infty}^{\infty} \int_{v_2=-\infty}^{\infty} v_1 v_2 f_{v_1}(v_1, t_1) f_{v_2}(v_2, t_2) dv_1 dv_2 \\
 &= \underbrace{\int_{v_1=-\infty}^{\infty} v_1 f_{v_1}(v_1, t_1) dv_1}_{m_{v_1}(t_1)} \underbrace{\int_{v_2=-\infty}^{\infty} v_2 f_{v_2}(v_2, t_2) dv_2}_{m_{v_2}(t_2)} \\
 &= m_{v_1}(t_1) m_{v_2}(t_2).
 \end{aligned}$$

Die Bedingung  $s_{v_1 v_2}(t_1, t_2) = m_{v_1}(t_1) m_{v_2}(t_2)$  (für kontinuierliche Signale) bzw.  $s_{v_1 v_2}(n_1, n_2) = m_{v_1}(n_1) m_{v_2}(n_2)$  (für diskrete Signale) wird **Unkorreliertheit** genannt.

Unkorreliertheit folgt unmittelbar aus statistischer Unabhängigkeit – aber nicht umgekehrt!

**Sekundäre stochastische Kenngrößen – Teil 17:**

Weiterhin folgt aus Unkorreliertheit für die Kreuzkovarianzfunktion bzw. –folge:

$$\psi_{v_1 v_2}(t_1, t_2) = 0.$$

Zu beachten ist außerdem, dass statistische Unabhängigkeit bzw. Unkorreliertheit oder Orthogonalität für alle  $\tau$  bzw.  $\kappa$  (bzw. alle  $(t_1, t_2)$  und  $(n_1, n_2)$ ) gelten kann, oder nur für bestimmte Zeitpunkte bzw. Zeitspannen.

Sollte die Kreuzkorrelationsfunktion bzw. –folge Null sein

$$s_{v_1 v_2}(t_1, t_2) = 0,$$

so nennt man dies **Orthogonalität** zwischen den Prozessen  $v_1(\dots)$  und  $v_2(\dots)$ . Dies kann z.B. dadurch erreicht werden, dass einer der beiden Prozesse mittelwertfrei ist und Unkorreliertheit vorliegt.

*Es sei noch einmal darauf hingewiesen, dass aus statistischer Unabhängigkeit automatisch Unkorreliertheit folgt, nicht aber umgekehrt. Unkorreliertheit und Orthogonalität sind „schwächere“ Eigenschaften (bzw. Forderungen), die aber für viele Probleme bzw. Lösungsansätze ausreichen.*

### Sekundäre stochastische Kenngrößen – Teil 18:

Die bisherigen Überlegungen lassen sich auch auf ein einzelnes Signal übertragen. Hier gilt Unkorreliertheit, etc. dann aber immer nur für bestimmte Zeitpunkte – zumindest der Versatz Null ist immer gesondert zu betrachten. Für ein (mit sich selbst) **unkorreliertes Signal** gilt dann für die Autokorrelationsfunktion bzw. –folge:

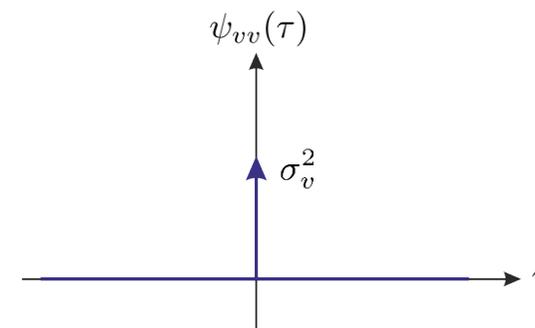
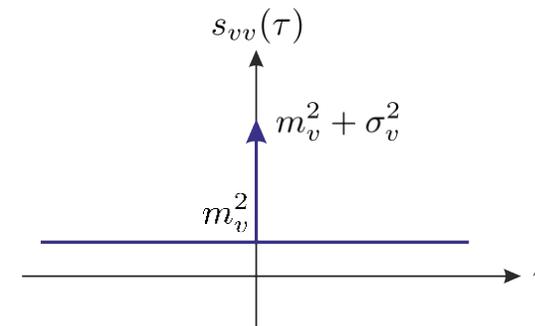
$$s_{vv}(\dots) = \begin{cases} m_v^2 + \sigma_v^2, & \text{falls } \tau, \kappa = 0, \\ m_v^2, & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$= m_v^2 + \sigma_v^2 \gamma_0(\dots).$$

Für die Autokovarianzfunktion bzw. –folge gilt dann:

$$\psi_{vv}(\dots) = \begin{cases} \sigma_v^2, & \text{falls } \tau, \kappa = 0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$= \sigma_v^2 \gamma_0(\dots).$$



**Beispiele – Teil 1:****Summenprozess:**

Häufig ist die Addition zweier Zufallsprozesse von Interesse (unter Umständen auch die Addition vieler bzw. unendlich vieler Signale, die mit Faktoren gewichtet werden, z.B. bei der Filterung bzw. Faltung). Wir betrachten hier zunächst den einfachsten Fall, d.h. die Addition zweier stationärer Zufallsprozesse:

$$y(n_1, n_2) = v_1(n_1) + v_2(n_2) = y(n, \kappa),$$

mit  $n_1 = n$ ,  $n_2 = n_1 + \kappa = n + \kappa$ . Gegeben sei dabei die Verbunddichte  $f_{v_1 v_2}(v_1, v_2, \kappa)$ .

Daraus können z.B. folgende Größen

$$f_{v_1}(v_1), f_{v_2}(v_2), m_{v_1}, m_{v_2}, \sigma_{v_1}^2, \sigma_{v_2}^2, \dots$$

bestimmt werden. Gesucht ist nun die Wahrscheinlichkeitsdichte  $f_y(y, \kappa)$  oder zumindest die Größen  $m_y$  und  $\sigma_y^2$ .

***Dieses Beispiel wird mit diskreten Zufallsprozessen gerechnet. Der Übergang auf kontinuierliche Prozesse ist aber recht einfach möglich.***

### Beispiele – Teil 2:

#### Summenprozess (Fortsetzung):

Der direkte Weg wäre zunächst die **Wahrscheinlichkeitsdichte**  $f_y(y, \kappa)$  zu bestimmen und daraus alle abgeleiteten Größen wie Mittelwert oder Varianz zu bestimmen. Da diese Dichte aber im Allgemeinen nicht einfach anzugeben ist (wir greifen dieses Problem später wieder auf), bestimmen wir zunächst einige abgeleitete Größen.

Bestimmung des **Mittelwertes**  $m_y$ :

$$\begin{aligned}
 m_y &= \mathbb{E}\{y(n, \kappa)\} = \mathbb{E}\{v_1(n) + v_2(n + \kappa)\} \\
 &= \int_{v_1} \int_{v_2} (v_1 + v_2) f_{v_1 v_2}(v_1, v_2, \kappa) dv_1 dv_2 \\
 &\quad \dots \text{Einsetzen der Definition des Erwartungswertes} \dots \\
 &= \int_{v_1} v_1 \underbrace{\int_{v_2} f_{v_1 v_2}(v_1, v_2, \kappa) dv_2}_{f_{v_1}(v_1)} dv_1 + \int_{v_2} v_2 \underbrace{\int_{v_1} f_{v_1 v_2}(v_1, v_2, \kappa) dv_1}_{f_{v_2}(v_2)} dv_2 \\
 &\quad \dots \text{Aufspalten des Integrals und Einsetzen der Definition der Randdichte} \dots
 \end{aligned}$$

### Beispiele – Teil 3:

Bestimmung des **Mittelwertes**  $m_y$  (Fortsetzung):

$$m_y = \int_{v_1} v_1 \underbrace{\int_{v_2} f_{v_1 v_2}(v_1, v_2, \kappa) dv_2}_{f_{v_1}(v_1)} dv_1 + \int_{v_2} v_2 \underbrace{\int_{v_1} f_{v_1 v_2}(v_1, v_2, \kappa) dv_1}_{f_{v_2}(v_2)} dv_2$$

**... Einsetzen der Definition des Mittelwertes ...**

$$= \underbrace{\int_{v_1} v_1 f_{v_1}(v_1) dv_1}_{m_{v_1}} + \underbrace{\int_{v_2} v_2 f_{v_2}(v_2) dv_2}_{m_{v_2}} = m_{v_1} + m_{v_2}.$$

**Dieses Ergebnis (  $m_y = m_{v_1} + m_{v_2}$  ) gilt ohne jegliche Zusatzbedingung!**

### Beispiele – Teil 4:

#### Summenprozess (Fortsetzung):

Als nächstes bestimmen wir das **zweite Moment** (den **quadratischen Mittelwert**)  $m_y^{(2)}$  und die **Varianz**  $\sigma_y^2$  (das **zweite zentrale Moment**):

$$\begin{aligned}
 m_y^{(2)}(\kappa) &= \mathbb{E}\{y^2(n, \kappa)\} = \mathbb{E}\{v_1^2(n) + 2v_1(n)v_2(n + \kappa) + v_2^2(n + \kappa)\} \\
 &= \underbrace{\mathbb{E}\{v_1^2(n)\}}_{m_{v_1}^{(2)}} + 2 \underbrace{\mathbb{E}\{v_1(n)v_2(n + \kappa)\}}_{s_{v_1v_2}(\kappa)} + \underbrace{\mathbb{E}\{v_2^2(n + \kappa)\}}_{m_{v_2}^{(2)}} \\
 &= m_{v_1}^{(2)} + m_{v_2}^{(2)} + 2s_{v_1v_2}(\kappa).
 \end{aligned}$$

Für die Varianz findet sich analog:

$$\sigma_y^2(\kappa) = \sigma_{v_1}^2 + \sigma_{v_2}^2 + 2\psi_{v_1v_2}(\kappa).$$

*Zu beachten ist hierbei, dass die quadratischen Kenngrößen nun vom Versatz abhängen, d.h. das Summationsergebnis ist nicht mehr stationär. Außerdem gilt hier nun nicht mehr die einfache Addition der Einzelleistungen, es muss auch die Korrelation bzw. Kovarianz zwischen den Einzelsignalen berücksichtigt werden!*

**Beispiele – Teil 5:****Summenprozess** (Fortsetzung):

Setzt man **unkorrelierte** Signale voraus, d.h. es gilt  $\psi_{v_1 v_2}(\kappa) = 0$ , so addieren sich nun auch die Varianzen

$$\sigma_y^2 = \sigma_{v_1}^2 + \sigma_{v_2}^2.$$

und auch die Abhängigkeit von  $\kappa$  verschwindet. Hierzu ist aber die Zusatzbedingung der Unkorreliertheit notwendig.

Setzt man **statistische Unabhängigkeit** der Signale  $v_1(n)$  und  $v_2(n + \kappa)$  für alle  $\kappa$  voraus (dies schließt Unkorreliertheit ein), so kann man auch die Wahrscheinlichkeitsdichte  $f_y(y)$  angeben (Herleitung auf den folgenden Folien bzw. an der Tafel):

$$f_y(y) = f_{v_1}(y) * f_{v_2}(y).$$

← **Faltung der beiden Randdichten**

**Charakteristische Funktion:**

Definition:

$$C_v(\omega) = \int_{v=-\infty}^{\infty} f_v(v) e^{j\omega v} dv = \mathbb{E}\{e^{j\omega v}\}.$$

Hierbei gilt folgende Anlehnung an die Fouriertransformation:

$$\mathcal{F}\{f_v(v)\} = \int_{v=-\infty}^{\infty} f_v(v) e^{-j\omega v} dv = C_v(-\omega).$$

Die charakteristische Funktion  $C_v(\omega)$  beschreibt den Prozess  $v(\dots)$  völlig gleichwertig wie die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion, da die Fourier-Transformation eindeutig umkehrbar ist.

## Beschreibung stochastischer Signale – Teil 35

### *Beispiele – Teil 6:*

#### *Summenprozess* (Fortsetzung):

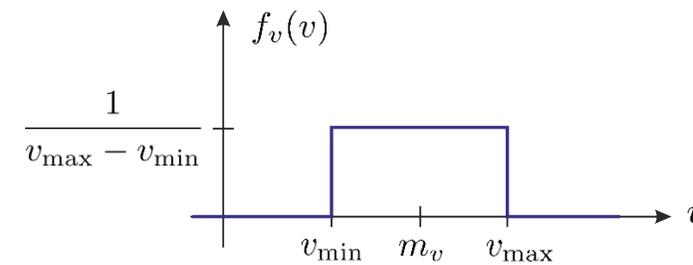
... Herleitung der Beziehung  $f_y(y) = f_{v_1}(y) * f_{v_2}(y)$  an der Tafel ....

### Beispiele für eindimensionale Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen – Teil 1:

#### Gleichverteilung:

Definition:

$$f_v(v) = \begin{cases} \frac{1}{v_{\max} - v_{\min}}, & \text{falls } v_{\min} \leq v \leq v_{\max}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$



Mittelwert:

$$\begin{aligned} m_v &= \int_{v=v_{\min}}^{v_{\max}} v \frac{1}{v_{\max} - v_{\min}} dv = \frac{1}{v_{\max} - v_{\min}} \left[ \frac{v^2}{2} \right]_{v_{\min}}^{v_{\max}} \\ &\quad \dots \text{Stammfunktion einsetzen und vereinfachen} \dots \\ &= \frac{v_{\max}^2 - v_{\min}^2}{2(v_{\max} - v_{\min})} = \frac{(v_{\max} - v_{\min})(v_{\max} + v_{\min})}{2(v_{\max} - v_{\min})} \\ &\quad \dots \text{weiter vereinfachen} \dots \\ &= \frac{v_{\max} + v_{\min}}{2}. \end{aligned}$$

**Der Mittelwert liegt hier in der „Mitte“ der Dichte – das gilt für alle symmetrischen Dichten.**

**Beispiele für eindimensionale Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen – Teil 2:****Gleichverteilung** (Fortsetzung):

Varianz:

$$\sigma_v^2 = \frac{1}{12} (v_{\max} - v_{\min})^2.$$

**Gaußverteilung** (auch Normalverteilung genannt):

Definition:

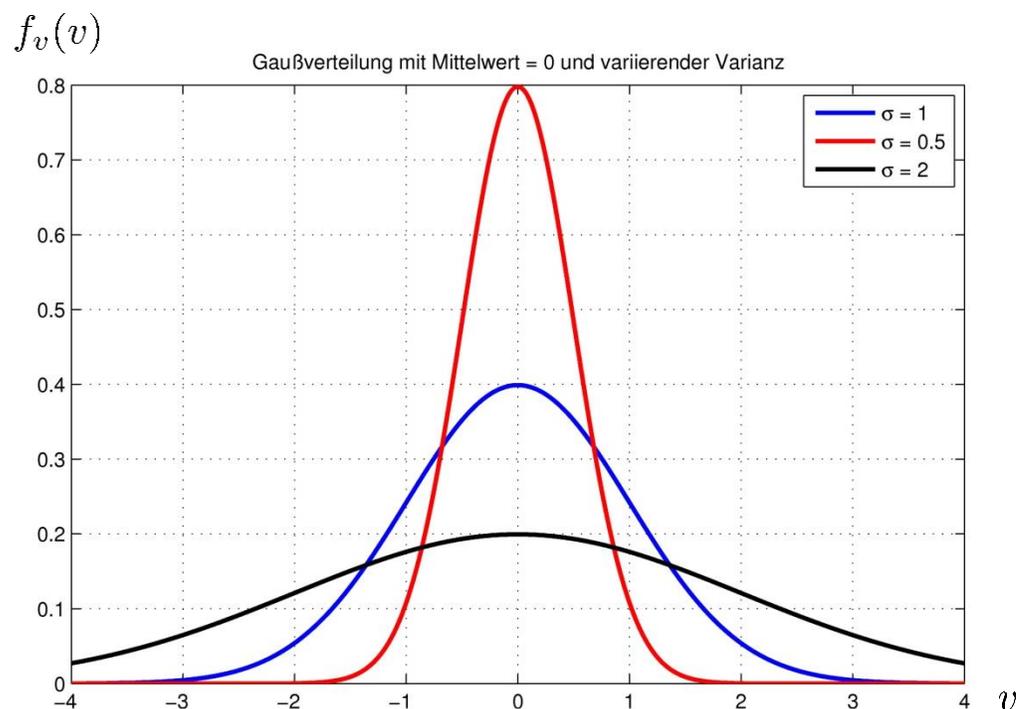
$$f_v(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v} e^{-\frac{(v-m_v)^2}{2\sigma_v^2}}.$$

Die wichtigsten Sekundärparameter (Mittelwert  $m_v$  und Varianz  $\sigma_v^2$ ) sind hier direkt Parameter der Funktion.

### Beispiele für eindimensionale Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen – Teil 3:

#### Gaußverteilung (Fortsetzung):

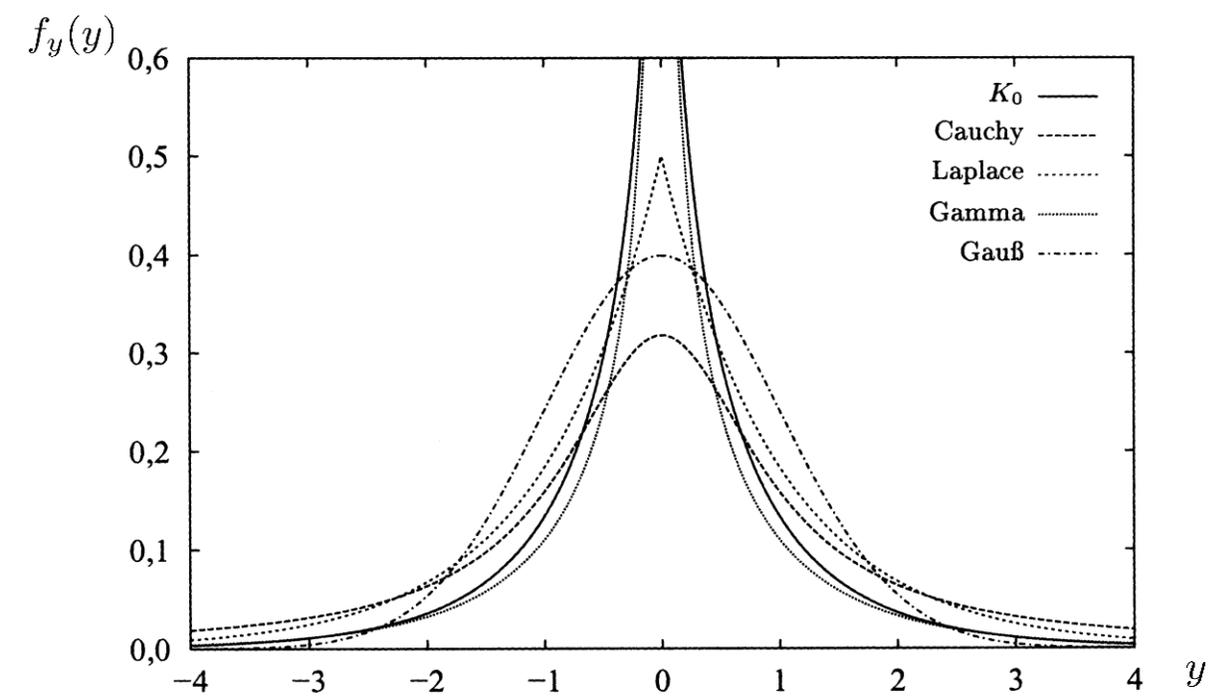
Darstellung:



**Gaußverteilungen weisen zahlreiche nützliche Besonderheiten auf, daher werden sie sehr häufig in Modellen verwendet. Schickt man beispielsweise einen Gaußverteilten Zufallsprozess durch ein lineares System, so entsteht am Ausgang wieder ein Gaußverteilter Zufallsprozess, welcher durch Mittelwert und Varianz vollständig beschrieben ist. Es genügt dann, nur diese beiden Parameter am Ausgang des Systems zu bestimmen, um zu einer vollständigen Dichtebeschreibung zu kommen.**

### Beispiele für eindimensionale Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen – Teil 4:

Weitere gängige Wahrscheinlichkeitsdichten:



aus D. Wolf: Signaltheorie – Modelle und Strukturen, Springer, 1999

### Beispiele für eindimensionale Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen – Teil 5:

Zufallsvariablen, die durch Verknüpfung statistisch unabhängiger, mittelwertfreier Gauß'scher Zufallsvariablen  $x$ ,  $z$  und  $w$  mit gleicher Varianz  $\sigma^2$  entstehen:

$$\text{K}_0 \quad y = x z \quad \implies \quad f_y(y) = \frac{1}{\pi \sigma^2} \text{K}_0 \left( \frac{|y|}{\sigma^2} \right)$$

$$\text{Cauchy} \quad y = x/z \quad \implies \quad f_y(y) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + y^2}$$

$$\text{Rayleigh} \quad y = \sqrt{x^2 + z^2} \quad \implies \quad f_y(y) = \begin{cases} \frac{y}{\sigma^2} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}, & \text{falls } y \geq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\text{Laplace} \quad y = x \sqrt{z^2 + w^2} \quad \implies \quad f_y(y) = \frac{1}{2\sigma^2} e^{-\frac{|y|}{\sigma^2}}$$

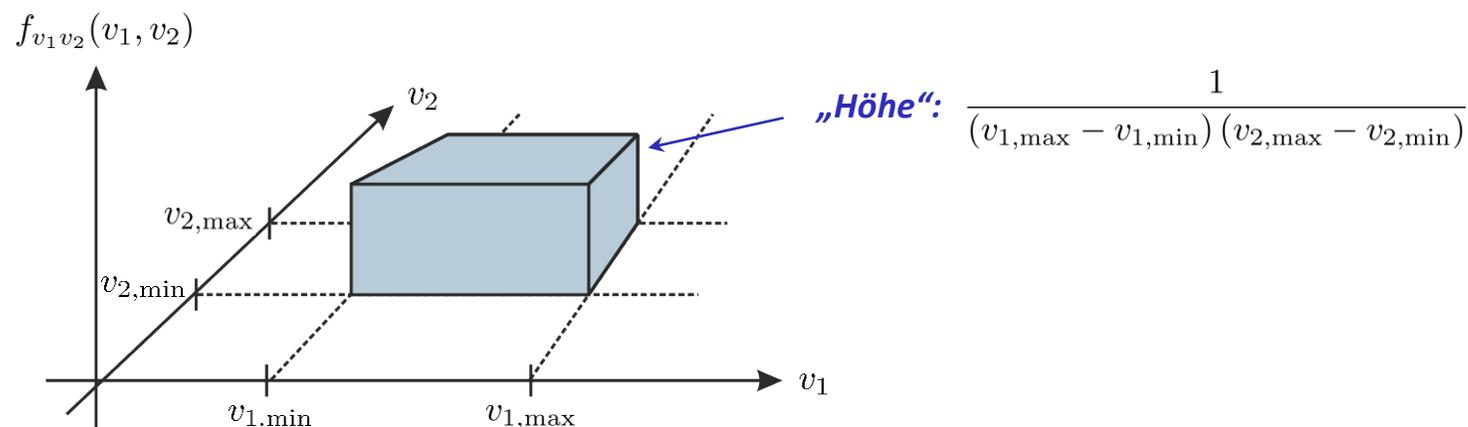
$$\text{Gamma} \quad y = x^2 \operatorname{sgn} x \quad \implies \quad f_y(y) = \frac{1}{\sqrt{8\pi\sigma^2|y|}} e^{-\frac{|y|}{2\sigma^2}}$$

### Beispiele für zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen – Teil 1:

#### Gleichverteilung:

Nehmen wir statistische Unabhängigkeit zwischen zwei Zufallsvariablen bzw. –prozessen an, so gilt für eine zweidimensionale Gleichverteilung:

$$\begin{aligned}
 f_{v_1 v_2}(v_1, v_2) &= f_{v_1}(v_1) f_{v_2}(v_2) \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{(v_{1,\max} - v_{1,\min})(v_{2,\max} - v_{2,\min})}, & \text{falls } (v_{1,\min} \leq v_1 \leq v_{1,\max}) \\ & \wedge (v_{2,\min} \leq v_2 \leq v_{2,\max}), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}
 \end{aligned}$$



### Beispiele für zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen – Teil 2:

#### Gaußverteilung:

Allgemein kann man die zweidimensionale Gaußdichte wie folgt angeben:

$$f_{v_1 v_2}(v_1, v_2) = \frac{1}{2\pi \sigma_{v_1} \sigma_{v_2} \sqrt{1 - \rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[ \left( \frac{v_1 - m_{v_1}}{\sigma_{v_1}} \right)^2 - 2\rho \left( \frac{v_1 - m_{v_1}}{\sigma_{v_1}} \right) \left( \frac{v_2 - m_{v_2}}{\sigma_{v_2}} \right) + \left( \frac{v_2 - m_{v_2}}{\sigma_{v_2}} \right)^2 \right]}.$$

Der Parameter  $\rho$  wird dabei als **Korrelationskoeffizient** bezeichnet.

Dieser ist definiert als

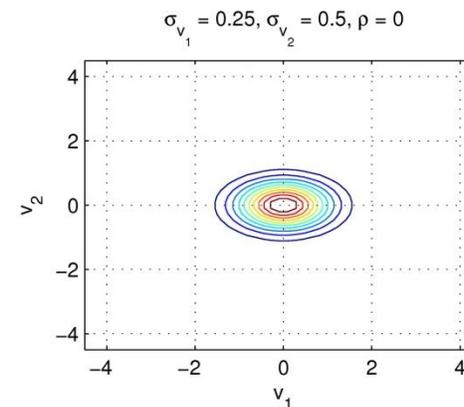
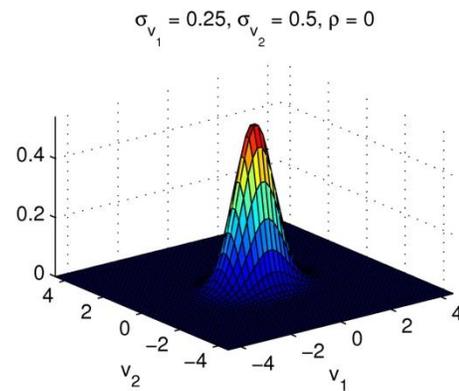
$$\rho = \frac{\psi_{v_1 v_2}(0)}{\sigma_{v_1} \sigma_{v_2}}.$$

Bei statistischer Unabhängigkeit gilt  $\rho = 0$  und die Dichte kann in zwei eindimensionale Gaußdichten separiert werden:

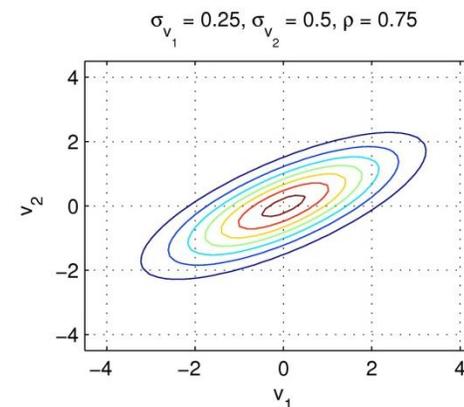
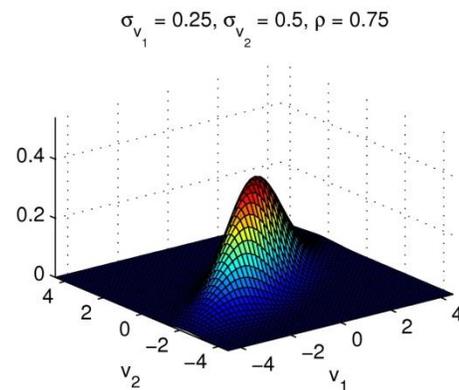
$$f_{v_1 v_2}(v_1, v_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{v_1}} e^{-\frac{(v_1 - m_{v_1})^2}{2\sigma_{v_1}^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{v_2}} e^{-\frac{(v_2 - m_{v_2})^2}{2\sigma_{v_2}^2}}.$$

### Beispiele für zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen – Teil 3:

**Gaußverteilung** (Fortsetzung):



**Statistische Unabhängigkeit liegt vor – die Höhenlinien der Dichte beschreiben Ellipsen, die Spiegelsymmetrien zu beiden Achsen aufweisen.**



**Statistische Unabhängigkeit liegt nicht vor ...**

## Beschreibung stochastischer Signale – Teil 44

### **Dichtetransformation – Teil 1:**

Die Wahrscheinlichkeitsdichte  $f_y(y)$  eines Zufallsprozesses  $y = g(v)$  kann aus der Wahrscheinlichkeitsverteilung  $F_y(y)$  hergeleitet werden. In vielen Fällen ist es jedoch einfacher die Dichte direkt aus  $f_v(v)$  und  $g(v)$  zu bestimmen. Hierzu gehen wir zunächst davon aus, dass  $f_v(v)$  keine Distributionen enthält.

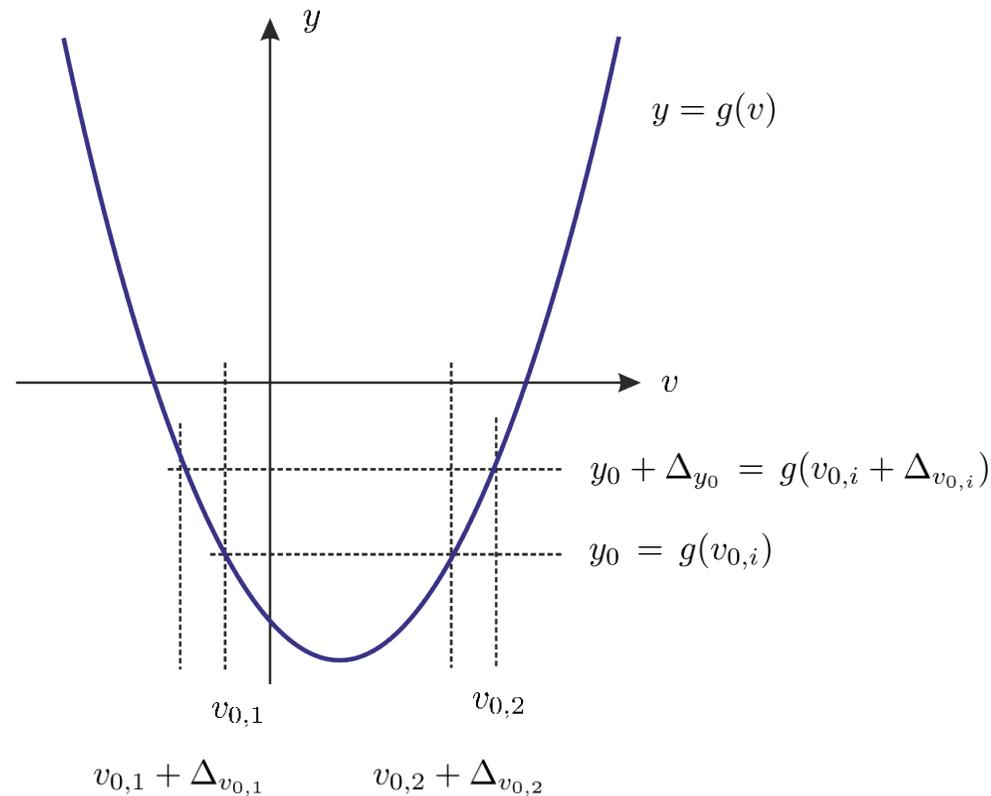
**Sollte dies doch der Fall sein, so können diese unmittelbar auf  $f_y(y)$  abgebildet werden: es gilt dann: aus  $a \delta_0(v - v_0)$  in  $f_v(v)$  wird  $a \delta_0(y - g(v_0))$  in  $f_y(y)$ .**

Für die Umrechnung der Wahrscheinlichkeitsdichte  $f_v(v)$  setzt man voraus, dass die Kennlinie  $y = g(v)$  für  $y = y_0$  und für  $y = y_0 + \Delta_y$  mit  $\Delta_y > 0$ , jeweils  $N$  einfache Lösungen aufweist:

$$\begin{aligned} y_0 &= g(v_{0,i}), \quad \text{für } i \in \{1, \dots, N\}, \\ y_0 + \Delta_{y_0} &= g(v_{0,i} + \Delta_{v_{0,i}}), \quad \text{für } i \in \{1, \dots, N\}. \end{aligned}$$

### Dichtetransformation – Teil 2:

Beispiel für eine **quadratische Funktion** – diese führt zu jeweils  $N = 2$  Lösungen.



**Dichtetransformation – Teil 3:**

Damit können folgende Ereignisse definiert werden:

$$A_y(y_0) = \{y_0 < y \leq y_0 + \Delta_y\},$$
$$A_v(v_{0,i}) = \begin{cases} \{v_{0,i} < v \leq v_{0,i} + \Delta_{v_{0,i}}\}, & \text{falls } \Delta_{v_{0,i}} > 0, \\ \{v_{0,i} + \Delta_{v_{0,i}} < v \leq v_{0,i}\}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für hinreichend kleines  $\Delta_y$  sind die Ereignisse  $A_v(v_{0,i})$  disjunkt und es gilt daher für deren Wahrscheinlichkeiten

$$p(A_y(y_0)) = P\left(\bigcup_{i=1}^N A_v(v_{0,i})\right) = \sum_{i=1}^N p(A_v(v_{0,i})).$$

Ferner kann man folgende Näherungen anstellen:

$$p(A_y(y_0)) \approx f_y(y_0) |\Delta_{y_0}|,$$
$$p(A_v(v_{0,i})) \approx f_v(v_{0,i}) |\Delta_{v_{0,i}}|.$$

**Dichtetransformation – Teil 4:**

Mit diesen Näherungen ergibt sich dann auch

$$f_y(y_0) |\Delta_{y_0}| \approx \sum_{i=1}^N f_v(v_{0,i}) |\Delta_{v_{0,i}}|.$$

Nimmt man schließlich an, dass  $g(v)$  differenzierbar ist, so geht die oben genannte Näherung für  $\Delta_{y_0} \rightarrow 0$  über in

$$f_y(y_0) |dy_0| = \sum_{i=1}^N f_v(v_{0,i}) |dv_{0,i}|.$$

Mit

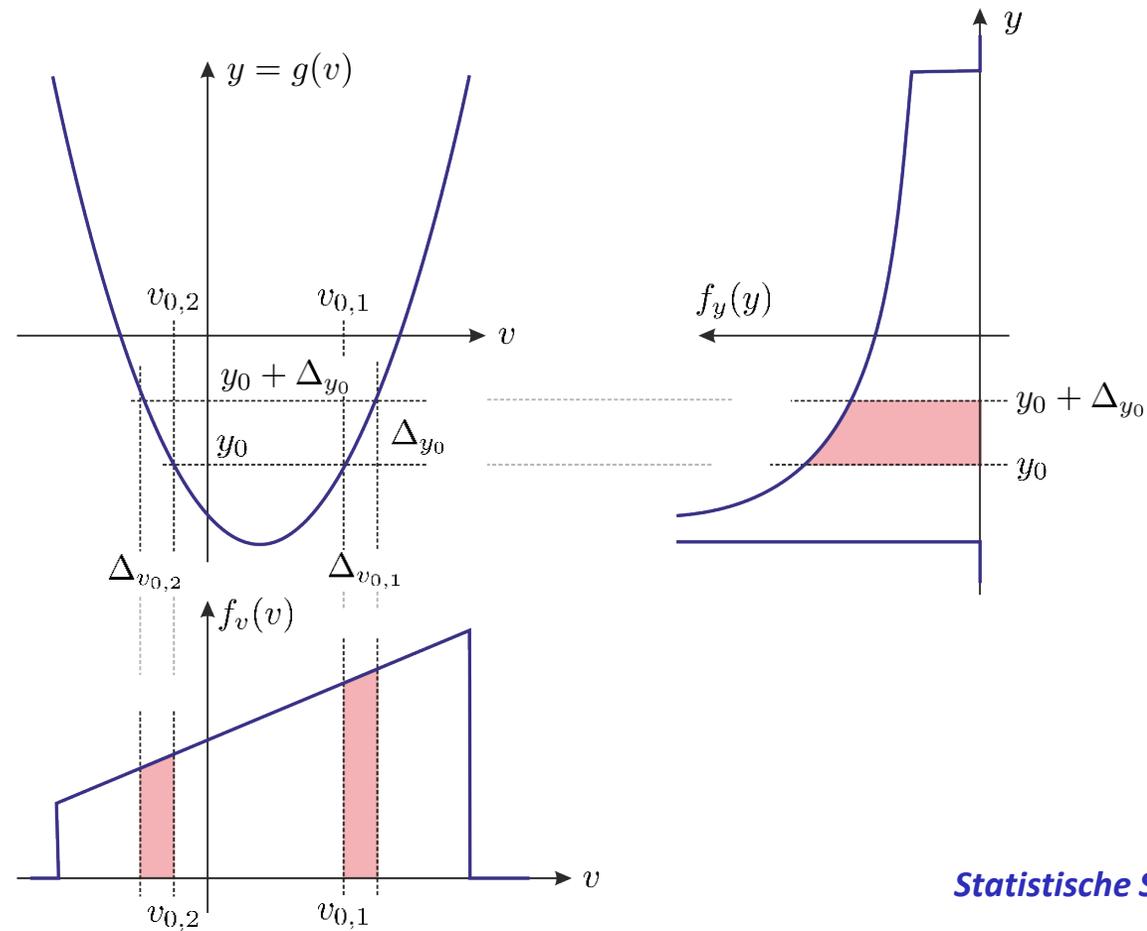
$$g'(v_{0,i}) = \left. \frac{dy}{dv} \right|_{v=v_{0,i}}.$$

ergibt sich schließlich

$$f_y(y_0) = \sum_{i=1}^N \frac{f_v(v_{0,i})}{|g'(v_{0,i})|}.$$

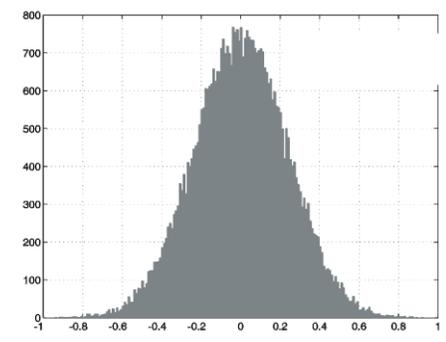
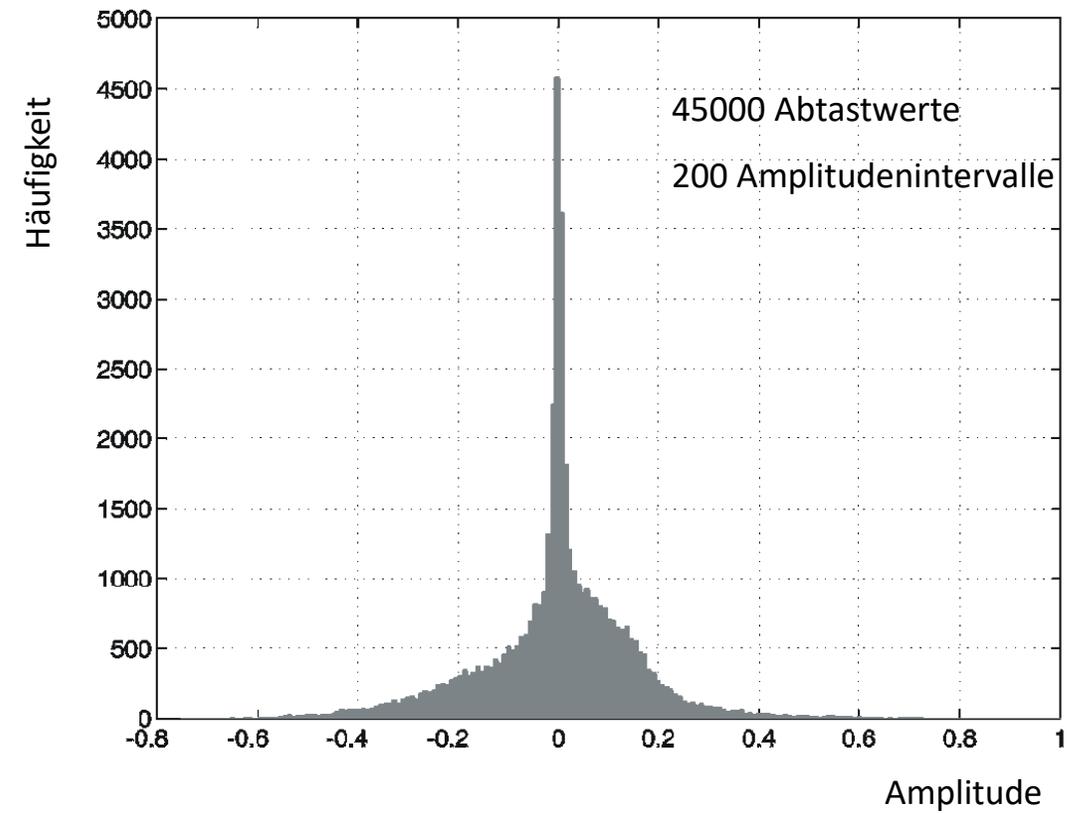
***Dieser Zusammenhang ist zur Systemanalyse nutzbar, aber auch für Systeme zur gezielten Wahrscheinlichkeitsdichteformung.***

### Dichtetransformation – Teil 5:



Übersichtsgraphik aus E. Hänsler:  
 Statistische Signale, 2. Auflage, Springer, 1996

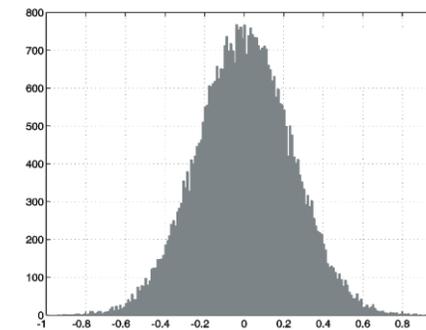
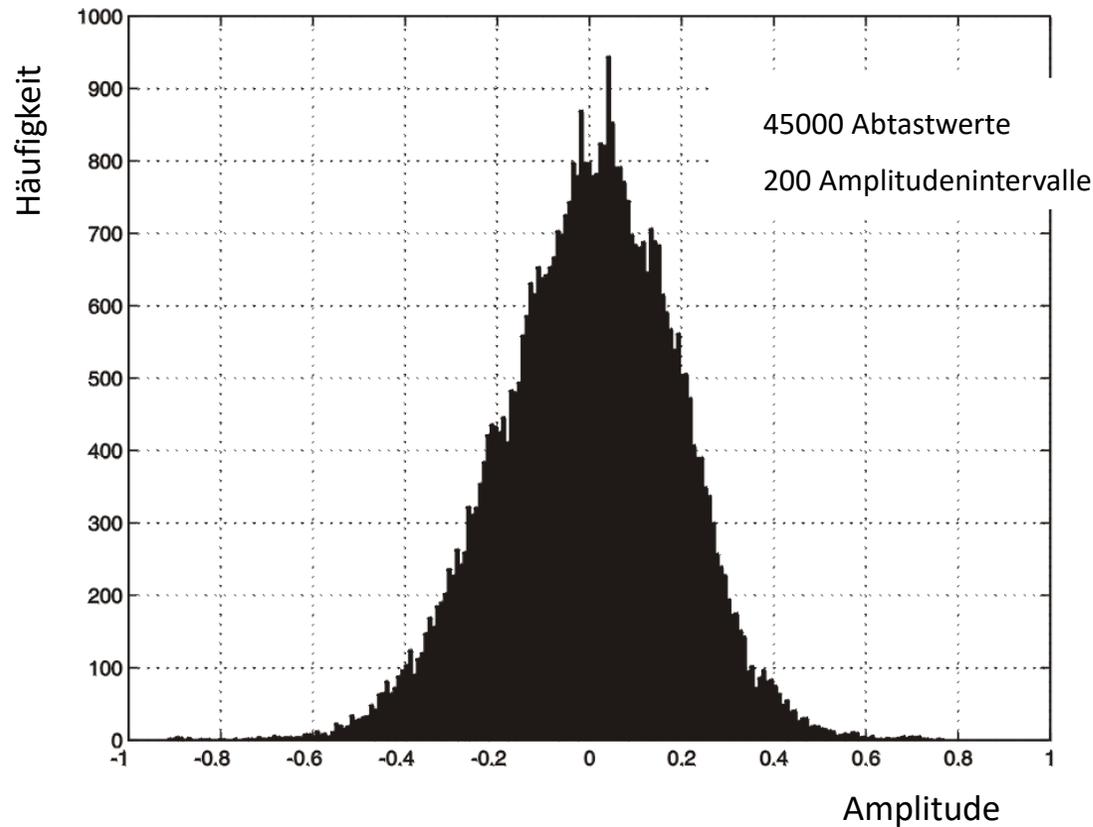
### Histogramm-Analyse eines Sprachsignals:



Gaußprozess

Graphik aus E. Häsler/G. Schmidt:  
Adaptive Filter, Vorlesung,  
TU Darmstadt

### Histogramm-Analyse von Fahrzeuggeräusch:



Gaußprozess

Graphik aus E. Häsler/G. Schmidt:  
Adaptive Filter, Vorlesung,  
TU Darmstadt

**Definitionen – Teil 1:**

Gegeben seien

- die Kreuzkorrelationsfunktionen  $s_{v_1 v_2}(\tau)$  bzw.  $s_{v_1 v_2}(\kappa)$
- oder die Autokorrelationsfunktionen  $s_{vv}(\tau)$  bzw.  $s_{vv}(\kappa)$

(oder die bis auf unterschiedliche Mittelwerte identischen Kreuz- bzw. Autokovarianzfunktionen).

Hiermit liegen dann wieder determinierte Funktionen bzw. Folgen vor, für die bei Erfüllung der bekannten Voraussetzungen entsprechende Transformierte angebar sind. Es gilt dabei:

- falls  $s_{vv}(\dots)$  bzw.  $s_{v_1 v_2}(\dots)$  aperiodisch und absolut summierbar bzw. integrierbar:

$S_{vv}(j\omega)$ ,  $S_{v_1 v_2}(j\omega)$ ,  $S_{vv}(e^{j\Omega})$  bzw.  $S_{v_1 v_2}(e^{j\Omega})$  als **Fourier-Transformierte**.

- falls  $s_{vv}(\dots)$  bzw.  $s_{v_1 v_2}(\dots)$  aperiodisch und exponentiell majorisierbar:

$S_{vv}(s)$ ,  $S_{v_1 v_2}(s)$ ,  $S_{vv}(z)$  bzw.  $S_{v_1 v_2}(z)$  als **Laplace-** bzw. **z-Transformierte**.

**Definitionen – Teil 2:**

Fortsetzung

- falls  $s_{vv}(\dots)$  bzw.  $s_{v_1v_2}(\dots)$  periodisch oder endlich:

$c_{\mu,vv}$ ,  $c_{\mu,v_1v_2}$ ,  $S_{M,vv}(\mu)$  bzw.  $S_{M,v_1v_2}(\mu)$  als **Diskrete Fourier-Transformierte** bzw. als **Fourier-Reihe**.

Man bezeichnet die Größen

- $S_{vv}(j\omega)$ ,  $S_{vv}(e^{j\Omega})$ ,  $S_{vv}(s)$ ,  $S_{vv}(z)$ ,  $c_{\mu,vv}$  bzw.  $S_{M,vv}(\mu)$  als **Autoleistungsdichtespektrum** und
- $S_{v_1v_2}(j\omega)$ ,  $S_{v_1v_2}(e^{j\Omega})$ ,  $S_{v_1v_2}(s)$ ,  $S_{v_1v_2}(z)$ ,  $c_{\mu,v_1v_2}$  bzw.  $S_{M,v_1v_2}(\mu)$  als **Kreuzleistungsdichtespektrum**.

**Hintergrund – Teil 1:**

Aus den vorangegangenen Vorlesungsteilen ist der Zusammenhang zwischen den Spektren kontinuierlicher Signale

$$V_0(j\omega), V_0(s), c_\mu \bullet \text{---} \circ v_0(t)$$

und den Spektren diskreter Signale

$$V(e^{j\Omega}), V(z), V_M(\mu) \bullet \text{---} \circ v(n)$$

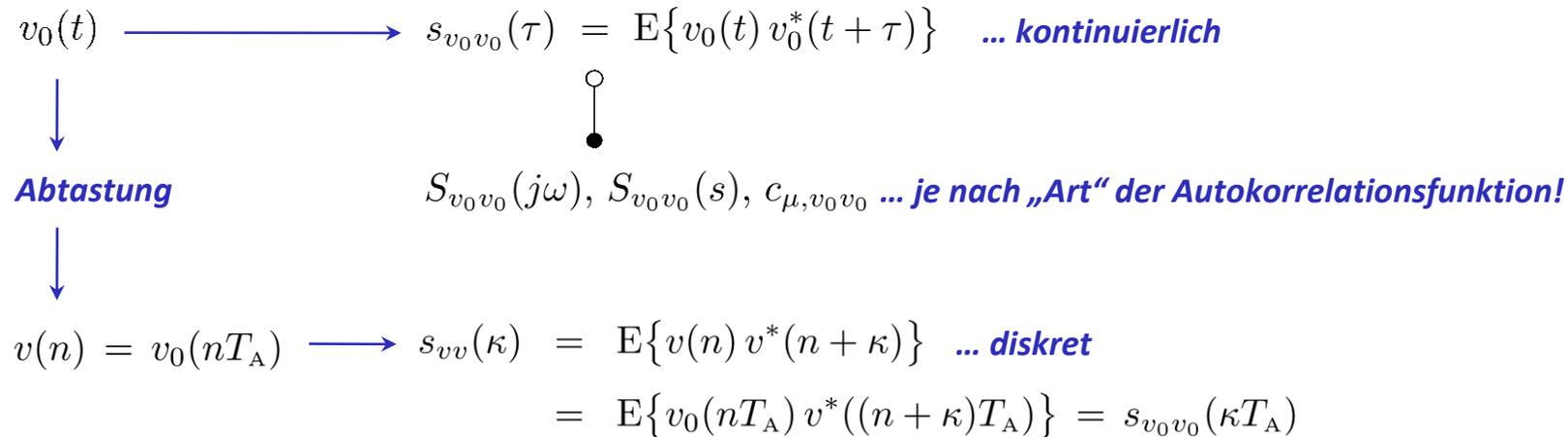
bekannt. Wir suchen nun den **Zusammenhang** des Leistungsdichtespektrums eines **kontinuierlichen** stochastischen Signals  $v_0(t)$  und dem Leistungsdichtespektrum eines **diskreten** stochastischen Signals  $v(n)$  für den Fall

$$v(n) = v_0(nT_A),$$

d.h. also einer **Abtastung** des kontinuierlichen stochastischen Signals.

### Hintergrund – Teil 2:

Lösung durch Betrachtung der Korrelierten (z.B. der Autokorrelationsfunktion)



**Die Autokorrelation der Abtastwerte entspricht den Abtastwerten der Autokorrelierten des kontinuierlichen Signals:**

$$s_{vv}(\kappa) = s_{v_0v_0}(\kappa T_A).$$

## Spektren – Teil 5

### *Hintergrund – Teil 3:*

Als Konsequenz ergibt sich:

#### *Alle Zusammenhänge*

$$V_0(j\omega) \iff V(e^{j\Omega})$$

$$V_0(s) \iff V(z)$$

$$c_\mu \iff V_M(\mu)$$

*übertragen sich unmittelbar auf die (Kreuz- und Auto-) Leistungsdichtespektren!*

### Beispiele – Teil 1:

Die **Kreuzkorrelationsfunktion zweier unkorrelierter Zufallsprozesse**:

□ kontinuierlich ...

$$s_{v_1 v_2}(\tau) = m_{v_1} m_{v_2}^* \quad \forall \tau$$
$$S_{v_1 v_2}(j\omega) = 2\pi m_{v_1} m_{v_2}^* \delta_0(\omega)$$

□ diskret ...

$$s_{v_1 v_2}(\kappa) = m_{v_1} m_{v_2}^* \quad \forall \kappa$$
$$S_{v_1 v_2}(e^{j\Omega}) = 2\pi m_{v_1} m_{v_2}^* \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \delta_0(\Omega - \nu 2\pi)$$

... entsprechend einer Spektrallinie, „ausgedrückt“ durch den ...

Fourier-Koeffizienten

$$c_{0, v_1 v_2} = m_{v_1} m_{v_2}^* \text{ bei } \omega = 0.$$

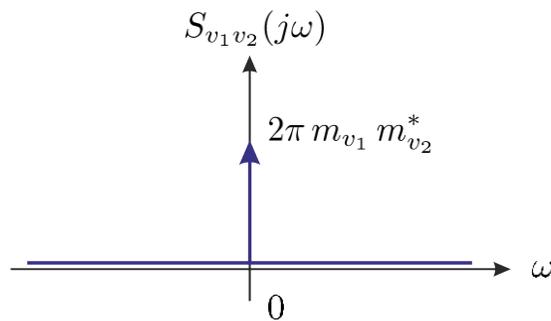
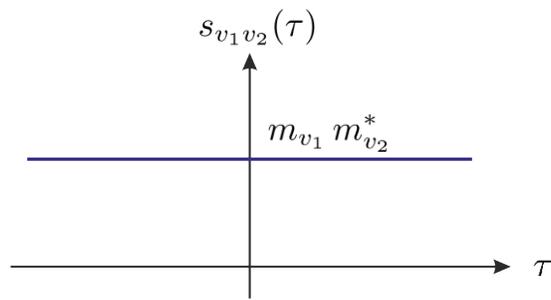
DFT-Koeffizienten

$$V_{M, v_1 v_2}(0) = m_{v_1} m_{v_2}^* \text{ bei } \mu = 0.$$

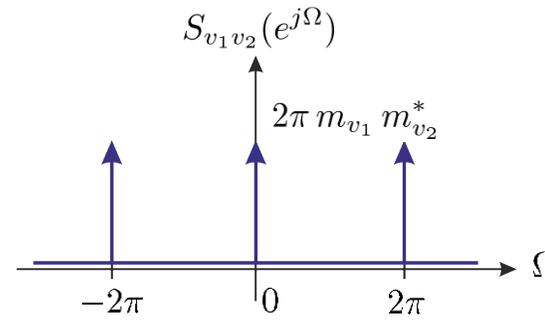
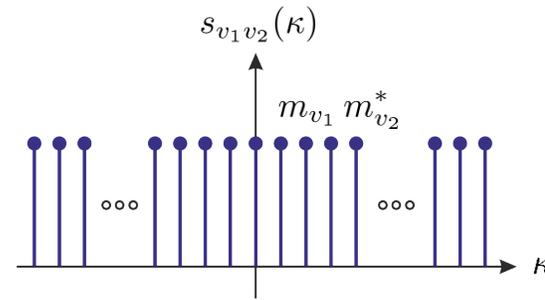
### Beispiele – Teil 2:

Die **Kreuzkorrelationsfunktion zweier unkorrelierter Zufallsprozesse** (Fortsetzung):

□ kontinuierlich ...



□ diskret ...



**Beispiele – Teil 3:****Autokorrelationsfunktion einer unkorrelierten Zufallsfolge:**

- Es ergibt sich für die Autokorrelationsfunktion:

$$s_{vv}(\kappa) = |m_v|^2 + \sigma_v^2 \gamma_0(\kappa).$$

Daraus ergibt sich für das Autoleistungsdichtespektrum

$$S_{vv}(e^{j\Omega}) = 2\pi |m_v|^2 \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \delta_0(\Omega - \nu 2\pi) + \sigma_v^2.$$

- Für den Sonderfall von mittelwertfreien Signalen, d.h.  $m_v = 0$ , ergibt sich:

$$s_{vv}(\kappa) = \sigma_v^2 \gamma_0(\kappa) \quad \circ \text{---} \bullet \quad S_{vv}(e^{j\Omega}) = \sigma_v^2 \quad \forall \Omega.$$

**Eine impulsförmige Autokorrelationsfunktion führt zu einem konstanten Leistungsdichtespektrum, d.h. alle Frequenzen sind gleichermaßen im Signal enthalten. In Analogie zur Optik nennt man so etwas „weißes Rauschen“.**

**Beispiele – Teil 4:****Kontinuierliches weißes Rauschen:**

- In Analogie zum letzten Beispiel gilt für kontinuierliches weißes Rauschen

$$S_{vv}(j\omega) = S_0 = \text{const. } \forall \omega,$$

d.h. ein konstantes Leistungsdichtespektrum für  $\omega \in [-\infty, \infty]$  !

- Die Rücktransformation  $s_{vv}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_{vv}(j\omega)\}$  liefert

$$s_{vv}(\tau) = S_0 \mathcal{F}^{-1}\{1\} = S_0 \delta_0(\tau),$$

d.h. man erhält nun einen Dirac-Impuls an der Stelle  $\tau = 0$ .

- Für die Leistung eines solchen Signals ergibt sich

$$\sigma_v^2 = s_{vv}(0) = S_0 \delta_0(0) \rightarrow \infty,$$

d.h. ein solches Signal müsste eine **unendlich große Leistung** besitzen.

**Beispiele – Teil 5:****Kontinuierliches weißes Rauschen** (Fortsetzung):

- Die „unendliche“ Leistung ist andererseits auch nicht überraschend, da bei einem unbegrenzten (hinsichtlich der Frequenz) konstantem Leistungsdichtespektrum gilt

$$\sigma_v^2 = \int_{\omega=-\infty}^{\infty} S_{vv}(j\omega) d\omega = S_0 \int_{\omega=-\infty}^{\infty} 1 d\omega \rightarrow \infty.$$

- Folgerungen:
  - Kontinuierliches weißes Rauschen existiert praktisch nur näherungsweise (als „bandbegrenzt-weißes“ Rauschen).
  - Angaben wie „normalverteiltes kontinuierliches weißes Rauschen“ sind im Grunde Widersprüche in sich, da
    - zum einen aufgrund der Eigenschaft „weiß“ eine unendlich große Leistung benötigt wird, aber
    - zum anderen aufgrund der Normalverteilung eine endliche Leistung angegeben wird.

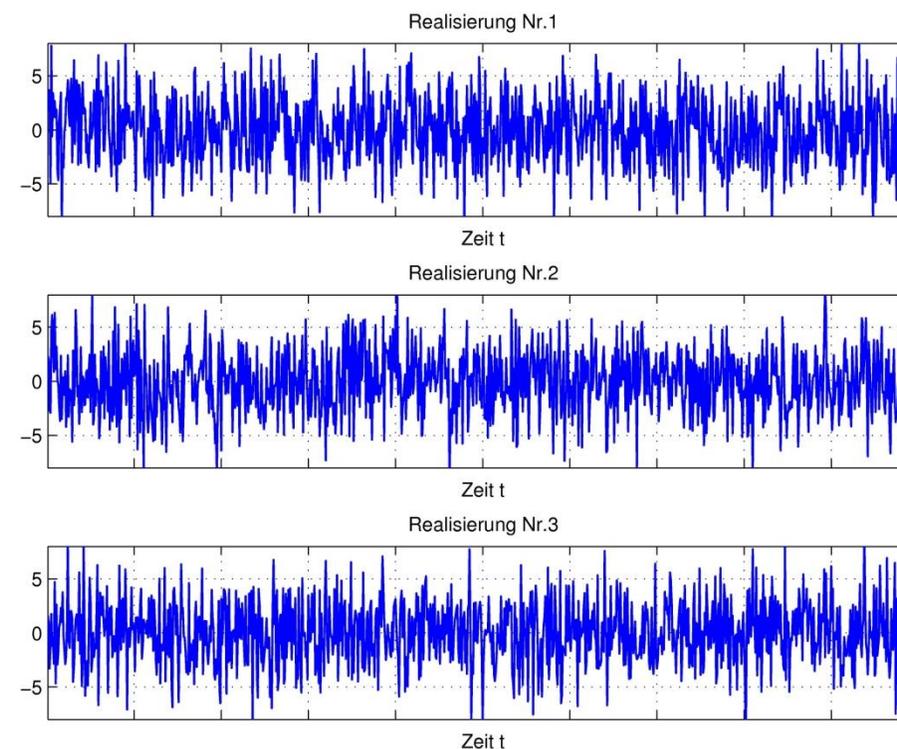
### Begriffserklärungen – Teil 1:

Unter einem Zufallsprozess bzw. einem stochastischen Signal ist ein „Ensemble“ von  $\infty$  vielen Signalen mit Entstehung nach identischer Vorschrift ( $f_v(v, t)$ ,  $f_{v_1 v_2}(v_1, v_2, t_1, t_2)$ , usw.) zu verstehen.

Beispiel 1:

„ $\infty$  viele Generatoren“ erzeugen Gaußverteiltes Rauschen (mit gleichem Mittelwert und gleicher Varianz).

(rechts sind drei „Prozess-Realisierungen“ eines stationären Prozesses [zusätzlich ergodisch - wird später erklärt] dargestellt).



## Zufallsprozesse und Signale – Teil 2

### ***Begriffserklärungen – Teil 2:***

Wenn – und nur wenn – Stationarität vorliegt, kann zusätzlich ***Ergodizität*** gelten. Diese ist wie folgt definiert:

- ❑ Ein stationärer Zufallsprozess heißt ***ergodisch***, wenn ***die Zeitmittelwerte jeder beliebigen Musterfunktion (Realisierung) mit Wahrscheinlichkeit Eins mit den entsprechenden Scharmittelwerten übereinstimmen.***

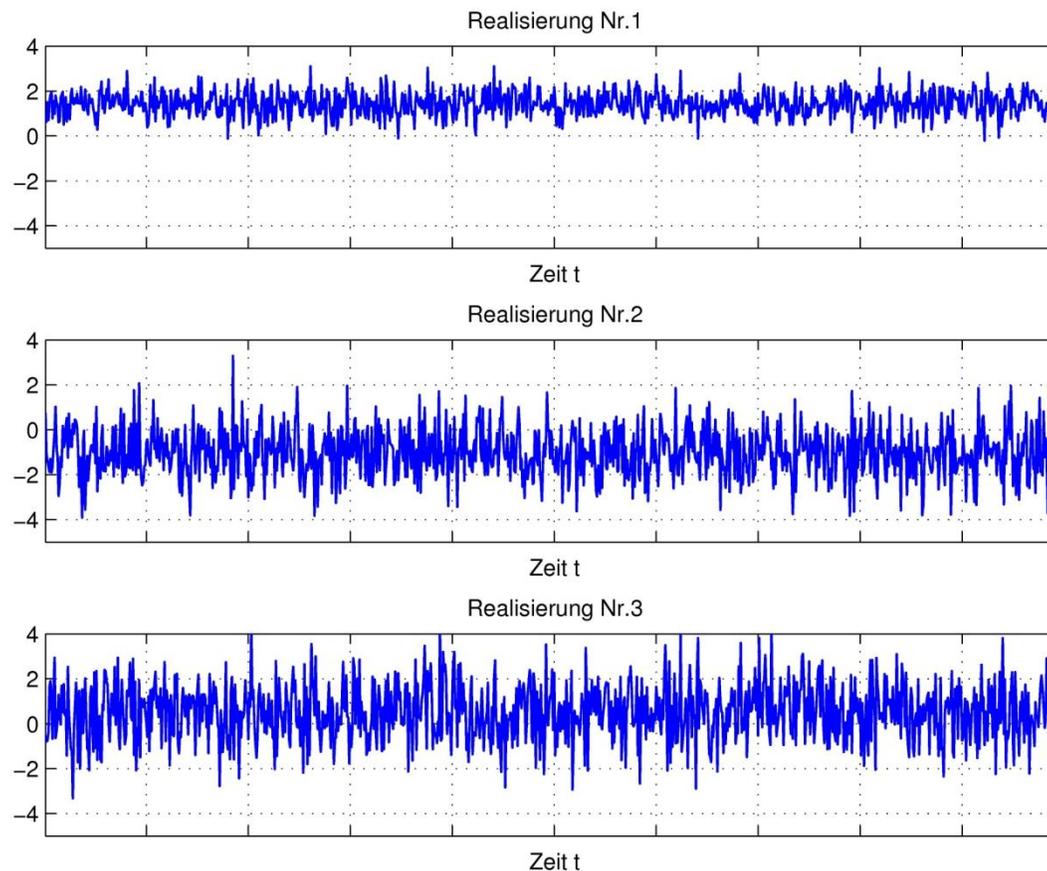
Bemerkungen:

- ❑ Ergodizität setzt Stationarität voraus.
- ❑ Ergodizität kann man nicht (streng) prüfen: Dazu müsste der Zufallsprozess mit allen  $\infty$ -vielen Realisierungen vorliegen.
- ❑ Ergodizität wird oft angenommen, damit man Einzelsignalmessungen verwenden darf.
- ❑ Kenngrößenermittlung in Zeitrichtung ist immer möglich, oft auch sinnvoll ohne dass Ergodizität gelten muss.

### Begriffserklärungen – Teil 3:

Beispiel 2:

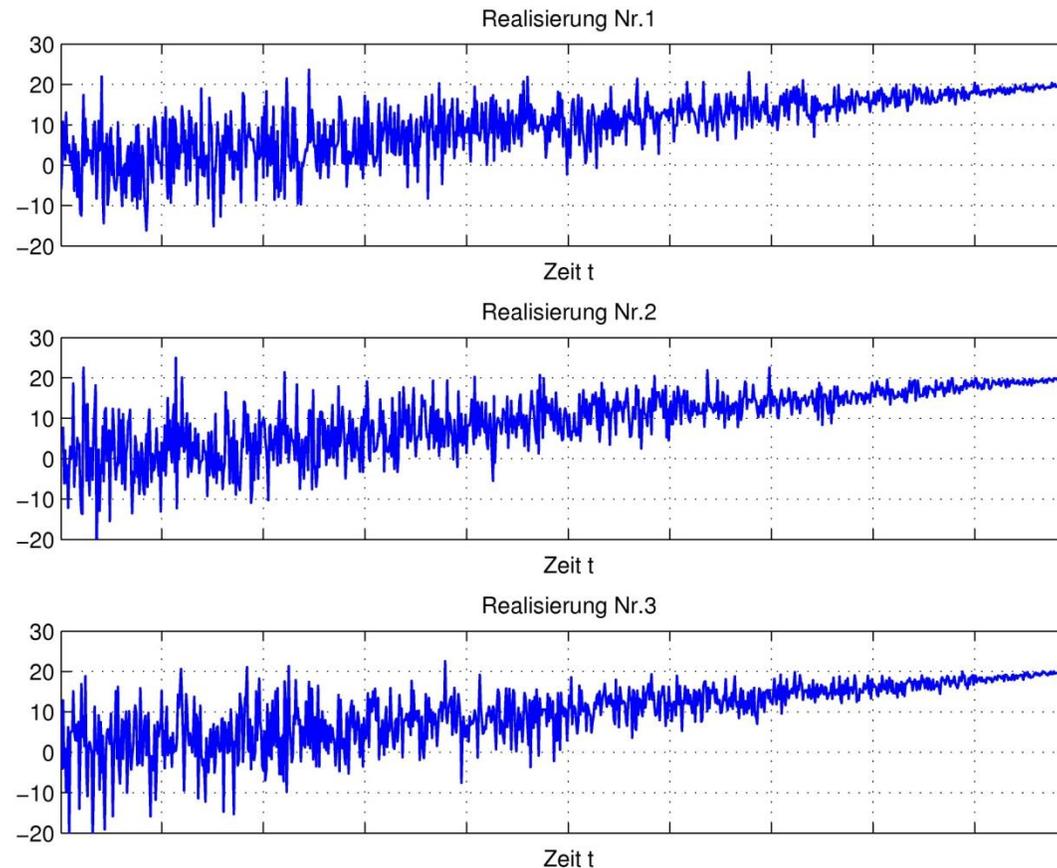
Rechts sind drei „Prozess-Realisierungen“ eines **stationären aber nicht ergodischen Prozesses** dargestellt (der Mittelwert und die Varianz bleibt zwar für eine Realisierung jeweils konstant, dafür ändern sich diese Parameter aber von Realisierung zu Realisierung).



### Begriffserklärungen – Teil 4:

Beispiel 3:

Rechts sind drei „Prozess-Realisierungen“ eines **instationären Prozesses** dargestellt (der Mittelwert und die Varianz ändern sich [in gleicher Weise für alle Realisierungen] über der Zeit).



**Zeit-Mittelwerte – Teil 1:**

Neben einer Messung bzw. Schätzung der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion aus Einzelsignalen interessiert oft der Ersatz der Momente durch entsprechende **zeitliche Mittelwerte**.

- Für eindimensionale **kontinuierliche** Größen gilt dabei:

$$\langle g(v) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2T} \int_{t=-T}^T g(v(t)) dt \right\}.$$

- Entsprechend gilt für eindimensionale **diskrete** Signale:

$$\langle g(v) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N g(v(n)) \right\}.$$

**Zeit-Mittelwerte – Teil 2:**

Analog wird für **zweidimensionale** Größen die zeitliche Mittelung gemäß

$$\langle g(v_1, v_2) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2T} \int_{t=-T}^T g(v_1(t), v_2(t)) dt \right\}.$$

bzw.

$$\langle g(v_1, v_2) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N g(v_1(n), v_2(n)) \right\}.$$

definiert:

Bemerkungen:

- In der Realität sind die zuvor genannten zeitlichen Mittelungen nur ohne Grenzübergang messbar (endliche Messzeit). Diese „lokalen“ Größen heißen dann **Kurzzeitmittelwerte** und sie weisen einen Zeitbezug auf.

### *Zeit-Mittelwerte – Teil 3:*

Bemerkungen (Fortsetzung):

- Lokale Mittelwerte bzw. Kurzzeitmittelwerte weichen im Allgemeinen von der „Langzeit-“ bzw. Gesamtsignal-Zeitmittelung ab und damit selbst bei Ergodizität von den interessierenden Prozesskenngrößen.

Diese **Abweichung ist zufällig** (stochastisch) – sie entsteht durch das zufällige Herausgreifen eines Intervalls  $t \in [-T, T]$  bzw.  $n \in [-N, N]$ . Solche Abweichungen können mit stochastischen Mittelungen beschrieben werden. Man erhält dann Aussagen über die „**Schätz-Güte**“ von Schätzverfahren (z. B. über Erwartungstreue von Mittelwertschätzern oder über die Varianz des Schätzfehlers).

Diese Schätztheorie wird im Weiteren aber nicht behandelt!

### Zeit-Mittelwerte – Teil 4:

Oft verwendete Zeitmittelwerte:

□ **Linearer Zeitmittelwert:**

$$\langle v(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2T} \int_{t=-T}^T v(t) dt \right\}, \quad \dots \text{Schätzung für } m_v!$$

$$\langle v(n) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N v(n) \right\}. \quad \dots \text{Schätzung für } m_v!$$

□ Schätzung des **zweiten Moments** durch Zeitmittelung:

$$\langle |v(t)|^2 \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2T} \int_{t=-T}^T v(t) v^*(t) dt \right\}, \quad \dots \text{Schätzung für } m_v^{(2)}!$$

$$\langle |v(n)|^2 \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N v(n) v^*(n) \right\}. \quad \dots \text{Schätzung für } m_v^{(2)}!$$

### Zeit-Mittelwerte – Teil 5:

Oft verwendete Zeitmittelwerte (Fortsetzung):

- Schätzung der **Varianz**:

$$\hat{\sigma}_v^2 = \langle |v(t)|^2 \rangle - |\langle v(t) \rangle|^2,$$

$$\hat{\sigma}_v^2 = \langle |v(n)|^2 \rangle - |\langle v(n) \rangle|^2.$$

... Schätzung für  $\sigma_v^2$  !

- Schätzung der **Kreuzkorrelation** durch Zeitmittelung (Autokorrelation analog):

$$\langle v_1(t) v_1^*(t + \tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2T} \int_{t=-T}^T v_1(t) v_1^*(t + \tau) dt \right\}, \quad \text{... Schätzung für } s_{v_1 v_1}(\tau) !$$

$$\langle v_1(n) v_1^*(n + \kappa) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2N + 1} \sum_{n=-N}^N v_1(n) v_1^*(n + \kappa) \right\}.$$

... Schätzung für  $s_{v_1 v_1}(\kappa)$  !

### *Zeit-Mittelwerte – Teil 5:*

Abschließende Bemerkungen:

- Die Messwerte „ohne Grenzübergänge“ heißen dann
  - linearer bzw. quadratischer **Kurzzeitmittelwert**,
  - **Kurzzeitvarianz** oder
  - **Kurzzeitkorrelation**.
- Von den zeitlichen Korrelationen gelangt man wieder zu den zugehörigen Leistungsdichtespektren, welche das Signal (und bei Ergodizität den Zufallsprozess) beschreiben.
- Von den Kurzzeitkorrelationen gelangt man durch entsprechende Transformationen zu den **Momentan-** bzw. **Kurzzeit- (Leistungsdichte-) Spektren**.

## Abschließende Verständnisfragen – Teil 1

### Partnerarbeit – Teil 1:

Versuchen Sie in Partnerarbeit folgende Fragen zu beantworten:

- Welche Signal- bzw. Prozesseigenschaften können Sie aus dem geschätzten Leistungsdichtespektrum eines Signals ermitteln?

.....  
.....  
.....

- Welche Anwendungen können Sie sich vorstellen, bei denen die Analyse des Leistungsdichtespektrums in Betracht gezogen werden sollte?

.....  
.....  
.....

## Abschließende Verständnisfragen – Teil 2

### Partnerarbeit – Teil 1:

- Was sagt die Kreuzkorrelationsfunktion bzw. –folge von zwei Signalen aus?

.....  
.....  
.....

- Für welche Anwendungen könnte man Kreuzkorrelationsfunktionen einsetzen?

.....  
.....  
.....

- Was ist der Unterschied zwischen statistischer Unabhängigkeit und Unkorreliertheit?

.....  
.....  
.....

## Abschließende Zusammenfassung

- ❑ Signale und Systeme – Einführung
- ❑ Signale
- ❑ Spektraldarstellungen determinierter Signale
- ❑ Lineare Systeme
- ❑ Modulation
- ❑ Systembeschreibung im Zustandsraum
- ❑ ***Stochastische Signale und ihre Spektren***
  - ❑ ***Beschreibung stochastischer Signale***
  - ❑ ***Spektren***
  - ❑ ***Zufallsprozess und Signal***
- ❑ Reaktion linearer Systeme auf stationäre stochastische Signale
- ❑ Idealisierte Systeme
- ❑ Ergänzungen zu Spektraltransformationen