Wintersemester 2023/2024

Signale und Systeme II

Übungsaufgaben

Inhaltsverzeichnis

1 Modulationssystem zur Sprachübertragung 3

2 Amplitudenmodulation 3

3 Winkelmodulation 4

4 Frequenzmodulation 5

5 Puls-Amplituden-Modulation und Quantisierung 6

6 Systembeschreibung im Zustandsraum 6

7 Systembeschreibung im Zustandsraum† 6

8 Laplaceverteilung 7

9 Stationarität und Ergodizität 7

10 Kreuz- und Autokorrelation 8

11 Stochastische Signale und lineare Systeme 8

12 Autokorrelation und lineare Systeme 8

13 Idealisierte Systeme 9

14 Idealisierte Systeme 9

15 Filterung und Autokorrelation 9

16 Hilbert-Transformation und Einseitenbandmodulation 10

1 Modulationssystem zur Sprachübertragung

Das in Abbildung 1 dargestellte Modulationssystem dient zum Schutz einer Sprachübertragung gegen unerlaubtes Mithören. Das Spektrum des reellwertigen Eingangssignals $u(t)$ ist in Abbildung 2 für $\omega > 0$ dargestellt.

(a) Analysieren Sie die Wirkungsweise der Schaltung durch Angabe der Spektren $G_i(j\omega) = \mathcal{F}\{g_i(t)\}$ an den einzelnen Punkten $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ der Schaltung.

(b) Ergänzen Sie die fehlenden Angaben ω_S und ω_D für das verwendete Hochpassfilter (HP) und das Tiefpassfilter (TP), wie sie in Abbildung 2 spezifiziert sind.

(c) Zeigen Sie, dass das gleiche System auch zur Demodulation geeignet ist.

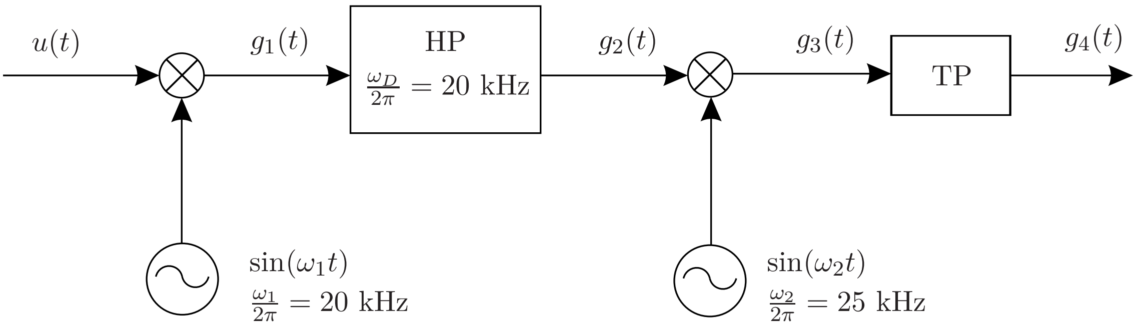

Abbildung 1: Modulationssystem zu Aufgabe 1.

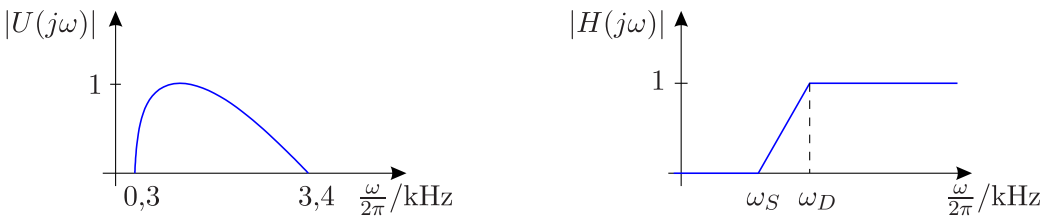

Abbildung 2: Spektrum des Eingangssignals und Frequenzgang des Hochpassfilters zu Aufgabe 1.

2 Amplitudenmodulation

Gegeben ist das reellwertige, bandbegrenzte Signal $v(t)$, für dessen Spektrum

$$V(j\omega) = 0 \quad \forall\, |\omega| > \omega_g$$

gilt. Zur Übertragung soll dieses Signal so modifiziert werden, dass das resultierende Spektrum $V_c(j\omega)$ um die Frequenz $\omega_T \gg \omega_g$ „verschoben“ wird. Gelten soll also

$$V_c(j\omega) = 0 \quad \forall\, (\omega_T - \omega_g) > \omega > (\omega_T + \omega_g).$$

(a) Welcher Ansatz für eine solche Modifikation ergibt sich aus dem Modulationssatz? Wie kann das Ausgangssignal $v(t)$ aus dem modulierten Signal $v_c(t)$ zurückgewonnen werden?

(b) Was ist ein Nachteil der Modulationsmethode aus (a)? Die Zweiseitenband-Modulation (ZSB-Modulation) umgeht dieses Problem. Wie wird hier das modulierte Signal $y_z(t)$ erzeugt und wie kann es demoduliert werden?

(c) Ein Nachteil der ZSB-Modulation wird ersichtlich, wenn man das Spektrum $Y_z(j\omega)$ des modulierten Signals skizziert. Welche Erweiterung der ZSB-Modulation kann hier helfen, wie heißt diese Modulationsart und welche Vorteile bietet sie bei der Demodulation?

(d) Die Amplitudenmodulation ist ein weit verbreitetes, der ZSB-Modulation ähnliches, Verfahren. Worin bestehen die Gemeinsamkeiten?

3 Winkelmodulation

Wie in der Vorlesung vorgestellt kann die Winkelmodulation als kontinuierliche Modulation eines Sinusträgers verstanden werden:

$$c_T(t) = \hat{c}_T \cos(\omega_T t + \varphi_T) = \hat{c}_T \cos(\Phi_T(t)) \,.$$

(a) Wie ließe sich eine ZSB-Modulation in diesem Trägersignal $c_T(t)$ integrieren?

(b) Welcher prinzipielle Unterschied besteht zwischen der Frequenzmodulation (FM) und der Phasenmodulation (PM)?

(c) In Abbildung 3 ist ein einfaches Nutzsignal $v(t)$ dargestellt. Bestimmen Sie jeweils für PM und FM die Momentan-Frequenz $\Omega_T(t)$ und skizzieren Sie diese.

(d) Welche Systemeigenschaften weist die Winkelmodulation bezüglich der Linearität, der Kausalität, der Verschiebungsinvarianz und der Stabilität auf? Weisen Sie diese Eigenschaften nach.

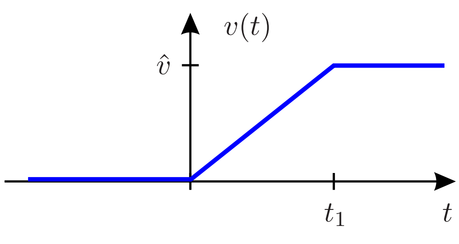

Abbildung 3: Nutzsignal zu Aufgabe 3.

4 Frequenzmodulation

Gegeben ist ein frequenzmoduliertes Signal der Form

$$c_T(t) = \hat{c}_T \cdot \cos\left(\omega_T t + \frac{2\pi\Delta f}{\omega_1}\sin(\omega_1 t)\right) \quad .$$

Trägeramplitude	$\hat{c}_T = 2$ V
Trägerfrequenz	$\omega_T = 2\pi \cdot 10,7 \cdot 10^6 s^{-1}$
Frequenzhub	$\Delta f = 75 \cdot 10^3 s^{-1}$

(a) Bei welcher Modulationsfrequenz wird mit den angegebenen Werten der Modulationsgrad $\eta = 5$ erreicht?

(b) Wie groß ist nach Carson die zur Übertragung dieses FM-Signals erforderliche Bandbreite?

(c) Welchen Frequenzabstand besitzen die einzelnen Spektrallinien des FM-Signals zueinander, und wieviele Linien werden durch die Abschätzung nach Carson berücksichtigt?

(d) Ermitteln Sie mit Hilfe von Abbildung 4 die Beträge der Amplituden der Spektrallinien bis zur Ordnung $\mu = 3$ und geben Sie die zugehörigen Frequenzen an.

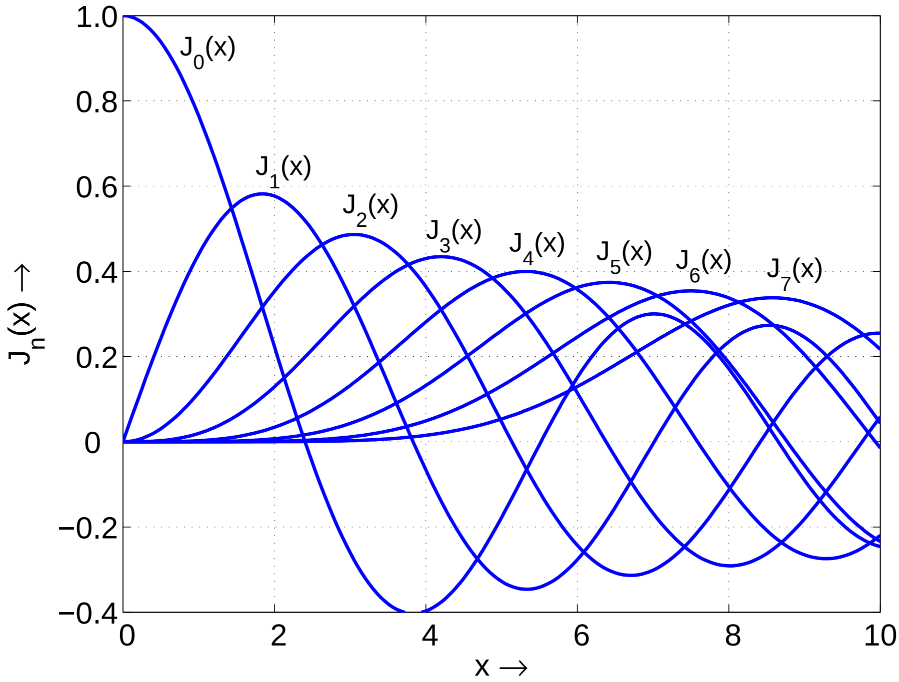

Abbildung 4: Besselfunktionen 1. Gattung n-ter Ordnung, zu Aufgabe 4.

5 Puls-Amplituden-Modulation und Quantisierung

In dieser Aufgabe werden die Grundlagen der Puls-Amplituden-Modulation (PAM) wiederholt. Dabei bezeichne $v(t)$ das Informationssignal und $y_p(t)$ das modulierte Signal. $V(j\omega)$ und $Y_p(j\omega)$ seien die entsprechenden Spektren.

(a) Worin unterscheiden sich PAM und Amplitudenmodulation, worin liegen die Gemeinsamkeiten?

(b) Wie kann ein PAM-Signal demoduliert werden? Welche Bedingung muss erfüllt sein, damit eine Demodulation überhaupt möglich ist. Erklären Sie dies, indem Sie ein geeignetes Spektrum $V(j\omega)$ annehmen und das resultierende Spektrum $Y_p(j\omega)$ skizzieren.

(c) Welcher weitere Schritt ist notwendig, um aus dem PAM-Signal ein digitales Signal $v_Q(n)$ zu erzeugen?

6 Systembeschreibung im Zustandsraum

Gegeben ist ein System, beschrieben durch folgende Zustandsgleichungen:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(n+1) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \mathbf{x}(n) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} v(n) \\ y(n) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(n) + v(n)\end{aligned}$$

(a) Berechnen Sie $y(n)$ für $n \in \{0,\ 1\}$ bei einer Anregung $v(n) = \gamma_0(n)$ und einem Anfangszustand

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Welchen Wert nimmt $\mathbf{x}(n)$ im eingeschwungenen Zustand ein?

(c) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion des Systems.

(d) Berechnen Sie die Impulsantwort $h_0(n)$.

7 Systembeschreibung im Zustandsraum†

Ein System sei durch die folgenden Zustandsgleichungen beschrieben:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(n+1) &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(n) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{v}(n) \\ \mathbf{y}(n) &= \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}(n) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{v}(n)\end{aligned}$$

mit $\quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad$ und $\quad \mathbf{D} = \mathbf{0}$.

(a) Zeichnen Sie den Signalflussgraphen des Systems.

(b) Bestimmen Sie die Übertragungsmatrix $\mathbf{H}(z)$.

(c) Wie lautet die Impulsantwortmatrix $\mathbf{h}_0(n)$?

8 Laplaceverteilung

Gegeben ist die Laplace-verteilte Zufallsvariable v, für deren Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion gilt

$$f_v(x) = \frac{\alpha}{2}\, e^{-\alpha|x|}.$$

(a) Skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_v(x)$ und auch grob die Wahrscheinlichkeitsverteilung $F_v(x)$. Welcher Wertebereich ist für den Parameter α zulässig?

(b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung $F_v(x)$.

(c) Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathrm{E}\{v\}$ sowie die Varianz σ_v^2.

(d) Bestimmen Sie die charakteristische Funktion $C_v(\omega)$ der Laplaceverteilung.

(e) Mit Hilfe des Momententheorems

$$\mathrm{E}\{v^k\} = \frac{1}{j^k} \frac{d^k C_v(\omega)}{d\omega^k}\bigg|_{\omega=0}$$

kann das $k$te Moment aus der charakteristischen Funktion bestimmt werden. Überprüfen Sie damit Ihre Ergebnisse aus Teilaufgabe (c).

9 Stationarität und Ergodizität

In dieser Aufgabe werden wichtige Grundbegriffe zur Beschreibung von Zufallsprozessen wiederholt. Die folgenden Fragen sollen auf einige Versuche mit MATLAB hinführen.

(a) Zwei bedeutende Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen sind die Gleichverteilung und die Normalverteilung (auch Gaußverteilung genannt). Geben Sie jeweils die Verteilungsdichtefunktionen an und skizzieren Sie diese.

(b) Was bedeutet Stationarität?

(c) Was bedeutet Ergodizität?

(d) Gegeben seien N Werte $v(n)$ der Realisierung eines Zufallsprozesses. Wie können Schätzwerte $\hat{m}_v$ und $\hat{\sigma}_v^2$ für Mittelwert und Varianz des Prozesses bestimmt werden?

10 Kreuz- und Autokorrelation

In dieser Aufgabe werden einige Eigenschaften der Kreuzkorrelationsfunktion (KKF) bzw. -folge und der Autokorrelationsfunktion (AKF) bzw. -folge untersucht.

(a) Zeigen Sie, dass für die KKF gilt

$$s_{v_1 v_2}(\kappa) = s^*_{v_2 v_1}(-\kappa).$$

Was folgt daraus für die KKF der reellen Signale $v_1(n),\ v_2(n)$? Wie kann dieser Zusammenhang auf die AKF eines reellen Signals übertragen werden?

(b) Zeigen Sie, dass für zwei reelle Zufallsvariablen v_1 und v_2 die Cauchy-Schwarz-Ungleichung gilt:

$$[\mathrm{E}\{v_1 v_2\}]^2 \leq \mathrm{E}\{v_1^2\}\,\mathrm{E}\{v_2^2\}.$$

Was folgt daraus für die AKF eines reellen Signals?

(c) Wie lassen sich die in *(a)* und *(b)* für diskrete Signale erzielten Ergebnisse auf die KKF bzw. AKF von kontinuierlichen Signale übertragen?

(d) Das Leistungsdichtespektrum $S_{vv}(j\omega)$ ist die Fouriertransformierte der AKF $s_{vv}(\tau)$. Zeigen Sie, dass für $\forall \omega \in \mathbb{R}$ gilt: $S_{vv}(j\omega) \geq 0$.

11 Stochastische Signale und lineare Systeme

Ein Nutzsignal $x(t) = a \cdot \cos(\omega_0 t)$ ist additiv durch mittelwertfreies weißes Rauschen $z(t)$ mit der Varianz σ_z^2 gestört, so dass nur das Signal

$$v(t) = x(t) + z(t)$$

gemessen werden kan. Dieses Signal $v(t)$ soll mit einem System mit dem Frequenzgang

$$H(j\omega) = \frac{1}{\alpha + j\omega} \qquad \text{mit } \alpha > 0$$

gefiltert werden, um so das Signal $y(t)$ zu erhalten.

(a) Berechnen Sie den Erwartungswert des gefilterten Signals $y(t)$.

(b) Geben Sie das Verhältnis von Nutz- zu Störleistung (SNR) am Filterausgang an.

(c) Für welche Wahl von α wird das SNR maximal?

12 Autokorrelation und lineare Systeme

Die Autokorrelierte $s_{vv}(\kappa)$ einer Zufallsfolge $v(n)$ sei für $\kappa \geq 0$ durch

$$s_{vv}(\kappa) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\kappa},\ \kappa \geq 0$$

gegeben.

(a) Geben Sie $s_{vv}(\kappa)$ für $\kappa \leq 0$ an.

(b) Berechnen Sie den Mittelwert und die Varianz von $v(n)$.

(c) Berechnen Sie die z-Transformierte $S_{vv}(z)$ von $s_{vv}(\kappa)$.

(d) Die Folge $v(n)$ werde auf ein System mit der Übertragungsfunktion

$$H(z) = \frac{z+2}{z+\frac{1}{2}}$$

gegeben. Geben Sie $S_{yy}(z)$ und $s_{yy}(\kappa)$ an.

13 Idealisierte Systeme

Gegeben ist ein einseitiger idealer Bandpass mit der Mittenfrequenz ω_m, einer Bandbreite von $2\Delta\omega$ und einer linearen Phase von $(-\omega t_0)$.

(a) Wie lautet der Frequenzgang $H^{(1)}(j\omega)$ dieses Bandpasses?

(b) Berechnen Sie die Impulsantwort $h_0^{(1)}(t)$ dieses Bandpasses.

(c) Wie lautet der Frequenzgang $H^{(2)}(j\omega)$ eines entsprechenden zweiseitigen Bandpasses?

(d) Berechnen Sie die Impulsantwort $h_0^{(2)}(t)$ des zweiseitigen Bandpasses

14 Idealisierte Systeme

Betrachtet wird ein linearphasiges System $S^{(1)}$ mit einer kosinusförmigen Betragsschwankung:

$$H^{(1)}(j\omega) = H_0\,(1 + \alpha\cos(\omega\tau))\,e^{-j\omega t_0}.$$

(a) Wie lautet die Impulsantwort des Systems $S^{(1)}$?

(b) Das Ausgangssignal von $S^{(1)}$ wird mit Hilfe eines idealen Tiefpassfilters $S^{(2)}$ mit der Grenzfrequenz ω_g bandbegrenzt. Geben sie die Impulsantwort der Kaskade aus $S^{(1)}$ und $S^{(2)}$ an.

15 Filterung und Autokorrelation

Diese Aufgabe wiederholt einige Grundbegriffe zur Autokorrelation und soll auf einen kleinen Versuch mit MATLAB vorbereiten.

Gegeben sei das Signal $v(n)$ als weißes Rauschen mit Mittelwert $m_v = 0$. Dieses soll mit einem schmalbandigen Bandpassfilter $H(z)$ gefiltert werden, um so das Ausgangssignal $y(n)$ zu erhalten.

(a) Durch welche Differenzengleichung kann die Bandpassfilterung beschrieben werden? Geben Sie auch die Übertragungsfunktion $H(z)$ in allgemeiner Form an.

(b) Wie ist die Autokorrelationsfolge $s_{vv}(\kappa)$ für stationäre Signale definiert? Wie kann sie geschätzt werden, wenn für $v(n)$ eine Messung vorliegt? Worin unterscheiden sich die Autokorrelation $s_{vv}(\kappa)$ und die Autokovarianz $\psi_{vv}(\kappa)$?

(c) Skizzieren Sie $s_{vv}(\kappa)$. Welche Unterschiede erwarten Sie für die Autokorrelationsfolge $s_{yy}(\kappa)$ nach der Filterung?

16 Hilbert-Transformation und Einseitenbandmodulation

In dieser Aufgabe werden zuerst Grundlagen zur Hilbert-Transformation wiederholt und anschließend eine Anwendungsmöglichkeit untersucht.

(a) Wie ist die Hilbert-Transformation definiert? Geben Sie sowohl Frequenzgang als auch Impulsantwort an. Was ist unter dem *analytischen Signal* $v_a(t)$ zu verstehen?

(b) Ist der Hilbert-Transformator kausal? Ist er bandbegrenzt?

(c) Geben Sie eine Realisierung der idealen Einseitenbandmodulation mit Hilfe des Hilbert-Transformators als Blockschaltbild an. Verwenden Sie dabei die Definition der Einseitenbandmodulation.

(d) Ist das resultierende System aus *(c)* kausal und bandbegrenzt? Wenn nicht, modifizieren Sie das System so, dass es kausal und bandbegrenzt wird.