Signale und Systeme II

Modulklausur Sommersemester 2026

Prüfer: Prof. Dr.-Ing. Gerhard Schmidt

Datum: 31.08.2026

Name: _____

Matrikelnummer: _____

Erklärung der Kandidatin/des Kandidaten vor Beginn der Prüfung

Hiermit bestätige ich, dass ich zur Prüfung angemeldet und zugelassen bin und dass ich prüfungsfähig bin.
Ich nehme zur Kenntnis, dass der Termin für die Klausureinsicht vom Prüfungsamt ET&IT bekannt gegeben wird, sobald mein vorläufiges Prüfungsergebnis im QIS-Portal veröffentlicht wurde. Nach dem Einsichtnahmetermin kann ich meine endgültige Note im QIS-Portal abfragen. Bis zum Ende der Widerspruchsfrist des zweiten Prüfungszeitraums der CAU kann ich beim Prüfungsausschuss Widerspruch gegen dieses Prüfungsverfahren einlegen. Danach wird meine Note rechtskräftig.

Unterschrift: _____

Korrektur

Aufgabe	1	2	3
Punkte	/33	/34	/33

Summe der Punkte: _____ /100

Einsicht/Rückgabe

Hiermit bestätige ich, dass ich die Korrektur der Klausur eingesehen habe und mit der auf diesem Deckblatt vermerkten Bewertung einverstanden bin.

☐ Die Klausurunterlagen verbleiben bei mir. Ein späterer Einspruch gegen die Korrektur und Benotung ist nicht mehr möglich.

Kiel, den _____ Unterschrift: _____

Signale und Systeme II

Modulklausur Sommersemester 2026

Prüfer:	Prof. Dr.-Ing. Gerhard Schmidt
Ort:	ES21, Geb.D - EG.005 (HS I)
Datum:	31.08.2026
Beginn:	09:00 h
Einlesezeit:	10 Minuten
Bearbeitungszeit:	90 Minuten

Hinweise

- Legen Sie Ihren Studierendenausweis oder Personalausweis zur Überprüfung bereit.
- Schreiben Sie auf **jedes** abzugebende Blatt deutlich Ihren **Namen** und Ihre **Matrikelnummer**. Dabei verwenden Sie bitte für **jede Aufgabe** der Klausur einen **neuen Papierbogen**. Zusätzliches Papier erhalten Sie auf Anfrage.
- Verwenden Sie zum Schreiben **weder Bleistift noch Rotstift**.
- Alle Hilfsmittel – außer solche, die die Kommunikation mit anderen Personen ermöglichen – sind erlaubt. Nicht zugelassene Hilfsmittel sind außer Reichweite aufzubewahren und auszuschalten.
- Die direkte Kommunikation mit Personen, die nicht der Klausuraufsicht zuzuordnen sind, ist grundsätzlich ebenfalls untersagt.
- Lösungswege müssen zur Vergabe der vollen Punktzahl immer nachvollziehbar und mit Begründung versehen sein. Sind Funktionen zu skizzieren, müssen grundsätzlich alle Achsen beschriftet werden. Beachten Sie, dass die Punkteverteilung in den Teilaufgaben nur vorläufig ist!
- Sollten Sie sich während der Klausur durch äußere Umstände bei der Bearbeitung der Klausur beeinträchtigt fühlen, ist dies unverzüglich gegenüber der Klausuraufsicht zu rügen.
- 5 Minuten und 1 Minute vor Klausurende werden Ankündigungen gemacht. Wird das **Ende der Bearbeitungszeit** angesagt, darf **nicht mehr geschrieben** werden.
- Legen Sie am Ende der Klausur alle Lösungsbögen ineinander (so, wie sie ausgeteilt wurden) und geben Sie auch die Aufgabenblätter und das **Deckblatt mit Ihrer Unterschrift** mit ab.
- Bevor alle Klausuren eingesammelt sind, darf weder der Sitzplatz verlassen noch geredet werden. Jede Form der Kommunikation wird zu diesem Zeitpunkt noch als **Täuschungsversuch** gewertet.
- Während der **Einlesezeit ist die Bearbeitung der Aufgaben untersagt**, dementsprechend sind alle Schreibutensilien oder Hilfsmittel beiseitezulegen. Jede Zuwiderhandlung wird als **Täuschungsversuch** geahndet.

Aufgabe 1 (33 Punkte)

Teil 1 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 gelöst werden.*

(a) Welche Bedingungen müssen für eine Funktion $F_x(x)$ gelten, damit es sich um eine Verteilungsfunktion handelt? (2 P)
Eine Verteilungsfunktion muss monoton steigend sein (1 P) und ist begrenzt von $\lim_{x\to-\infty} F_x(x) = 0$ bis $\lim_{x\to+\infty} F_x(x) = 1$. (1 P)

(b) Geben Sie den Zusammenhang zwischen einer Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_x(x)$ und einer Verteilungsfunktion $F_x(x)$ an. (1 P)

$$f_x(x) = \frac{d}{dx} F_x(x) \qquad (1\text{ P})$$

bzw.

$$F_x(x) = \int_{v=-\infty}^{x} f_x(v)dv \qquad (1\text{ P})$$

(c) Erklären Sie den mathematischen Unterschied zwischen einem deterministischen Signal und einem stochastischen Signal. (2 P)
Ein deterministisches Signal ist analytisch beschreibbar oder anderweitig eindeutig definiert, während dies bei einem stochastischen Signal nicht der Fall ist. Es enthält zufällige Komponenten, die durch Wahrscheinlichkeitsverteilungen bzw. -dichten sowie durch Korrelationsfunktionen beschrieben werden können. (2 P)

(d) Was bedeutet Stationarität? (1 P)
Stationarität bedeutet, dass die statistischen Eigenschaften des Zufallsprozesses sich mit der Zeit nicht ändern. (1 P)

Gegeben ist folgende Funktion $f_x(x)$:

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & \text{für } 0 \le x < 1 \\ -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1 & \text{für } 1 \le x < 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(e) Überprüfen Sie rechnerisch, ob die Funktion $f_x(x)$ Bedingungen einer Wahrscheinlichkeitsdichte erfüllt. Geben Sie dabei alle erforderlichen Bedingungen an und überprüfen Sie diese. (3 P)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)dx = 1$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{2}x^2 dx + \int_1^2 (-\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1)dx$$
$$= \frac{1}{6} + \frac{5}{6}$$
$$= 1 \qquad (2\text{ P})$$

Die Funktion $f_x(x)$ ist nicht negativ, also es gilt $f_x(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (1 P)

Unabhängig von Ihrem Ergebnis in Aufgabenteil (e), nehmen Sie an, dass $f_x(x)$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte beschreibt.

(f) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion $F_x(x)$ zur Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_x(x)$. (4 P)

$$F_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x^3 & \text{für } 0 \leq x < 1 \qquad (1\text{ P}) \\ -\frac{1}{6}x^3 + x^2 - x + \frac{1}{3} & \text{für } 1 \leq x < 2 \qquad (2\text{ P}) \\ 1 & \text{für } x > 2 \qquad (0.5\text{ P}) \\ 0 & \text{sonst} \qquad (0.5\text{ P}) \end{cases}$$

(g) Berechnen Sie das erste Moment, das zweite Moment und das zweite zentrale Moment der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_x(x)$. (7 P)

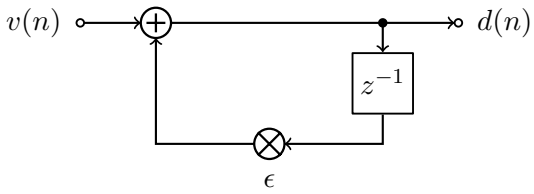
$$m_x^{(1)} = m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x)dx$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{2}x^3 dx + \int_1^2 x\left(-\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1\right)dx$$
$$= \frac{1}{8} + \frac{31}{24}$$
$$= \frac{17}{12} \qquad (3\text{ P})$$

$$
\begin{aligned}
m_x^{(2)} &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_x(x) dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2} x^4 dx + \int_1^2 x^2 \left(-\frac{1}{2} x^2 + 2x - 1 \right) dx \\
&= \frac{1}{10} + \frac{31}{15} \\
&= \frac{13}{6} \qquad (3\text{ P})
\end{aligned}
$$

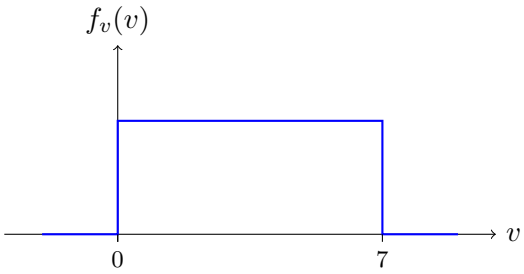
$$
\sigma_x^2 = m_x^{(2)} - m_x^2 \approx 0.1597 \qquad (1\text{ P})
$$

Teil 2 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 gelöst werden.*

Gegeben ist das folgende System mit reeller Impulsantwort $h_0(n)$ und einer reellen Konstanten $|\epsilon| < 1$:



Im Folgenden wird das System mit weißem Rauschen $v(n)$ angeregt, dessen Wahrscheinlichkeitsdichte gegeben ist durch:



(h) Um was für eine Verteilung handelt es sich bei $f_v(v)$? (1 P)

Bei dem Signal $v(n)$ handelt es sich um gleichverteiltes weißes Rauschen. (1 P)

(i) Bestimmen Sie den Mittelwert m_v und die Varianz σ_v^2 des Eingangssignals $v(n)$. (2 P)

$$m_v = \frac{0+7}{2} = 3.5 \quad \text{(1 P)}$$

$$\sigma_v^2 = \frac{7^2 - 0}{12} = \frac{49}{12} \quad \text{(1 P)}$$

(j) Geben Sie die Autokorrelation und das Autoleistungsdichtespektrum des Eingangssignals $v(n)$ an. (2 P)

$$s_{vv}(\kappa) = |m_v|^2 + \sigma_v^2 \cdot \gamma_0(\kappa) \quad \text{(1 P)}$$

$$S_{vv}(e^{j\Omega}) = 2\pi|m_v|^2 \cdot \sum_{v=-\infty}^{\infty} \delta_0(\Omega - v2\pi) + \sigma_v^2 \quad \text{(1 P)}$$

Für die folgenden Aufgaben gilt für die Konstanten $\epsilon = -0.5$, $\sigma_v^2 = 1$ und $m_v = 0$, sowie die Bedingung, dass die Impulsantwort des Systems durch $h_0(n) = (-0.5)^n \cdot \gamma_{-1}(n)$ beschrieben werden kann.

(k) Geben Sie die Autokorrelation des Ausgangs $S_{dd}(\kappa)$ für $\kappa > 0$ an. (7 P)
Hinweis: Nutzen Sie die Eigenschaft, dass die Autokorrelation des Ausgangssignals proportional zur Autokorrelation der Impulsantwort des Systems ist.

$$
\begin{aligned}
d(n) &= \sum_{i=\infty}^{\infty} h_0(i)v(n-i) \\
S_{dd}(\kappa) &= E\Big\{d(n)d(n+\kappa)\Big\} \\
&= E\left\{\left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} h_0(i)v(n-i)\right)\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} h_0(i)v(n+\kappa-j)\right)\right\} \\
&= \sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty} h_0(i)\cdot h_0(j)\cdot E\Big\{v(n-i)v(n+\kappa-j)\Big\} \\
&= \sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty} h_0(i)\cdot h_0(j)\cdot S_{vv}(\kappa-j+i) \\
&= \sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty} h_0(i)\cdot h_0(j)\cdot \sigma_v^2\cdot \delta_0(\kappa-j+i) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} h_0(i)\cdot h_0(i+\kappa) \quad \text{(1 P)} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} (-0.5)^i\cdot(-0.5)^{i+\kappa} \quad \text{(1 P)} \\
&= (-0.5)^{\kappa}\sum_{i=0}^{\infty}((-0.5)^2)^i \quad \text{(1 P)} \\
&= (-0.5)^{\kappa}\sum_{i=0}^{\infty}(0.25)^i \quad \text{(1 P)}
\end{aligned}
$$

Die Summe ist eine geometrische Reihe:

$$\sum_{i=0}^{\infty} r^i = \frac{1}{1-r} = \frac{1}{1-0.25} = \frac{4}{3} \quad \text{(2 P)}$$

Damit ergibt sich für die Autokorrelation:

$$S_{dd}(\kappa) = \frac{4}{3}\cdot(-0.5)^{\kappa} \quad \text{(1 P)}$$

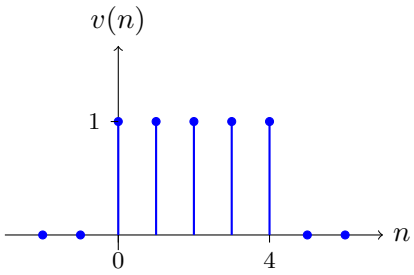
(l) Geben Sie die Autokorrelation des Ausgangs $S_{dd}(\kappa)$ für $\kappa \in \mathbb{Z}$ an. (1 P)

$$S_{dd}(\kappa) = \frac{4}{3}\cdot(-0.5)^{|\kappa|} \quad \text{(1 P)}$$

Aufgabe 2 (34 Punkte)

Teil 1 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 gelöst werden.*

Ein diskretes System wird mit folgendem Eingangssign $v(n)$ angeregt:



$$v(n) = \begin{cases} 1 & , 0 \leq n < 5 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

Die Impulsantwort $h_0(n)$ des Systems, ist durch folgende Gleichung gegeben:

$$h_0(n) = \gamma_0(n-1) - \frac{1}{2}\gamma_0(n-2) - \frac{1}{4}\gamma_0(n-3) - \frac{1}{8}\gamma_0(n-4) - \frac{1}{16}\gamma_0(n-5)$$

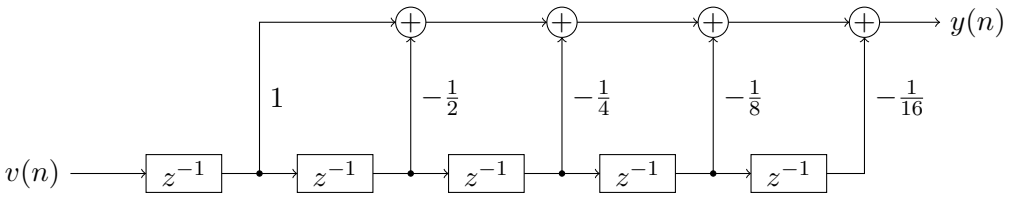
(a) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $H(z)$. (2.5 P)

0.5 Punkte pro richtigem Term.

$$H(z) = \frac{Y(z)}{V(z)} = z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2} - \frac{1}{4}z^{-3} - \frac{1}{8}z^{-4} - \frac{1}{16}z^{-5}$$

(b) Zeichnen Sie den zu obigem System gehörigen Signalflussgrafen. (6.5 P)

1.5 Punkte für richtige Beschriftung/Formrichtigkeit des Signalflussgrafen.
1 Punkte pro richtige Umsetzung der Terme aus $h_0(n)$.



(c) Wie viele Eingänge L, Ausgänge M und Zustände N hat das System? (1.5 P)

Zustände $N = 5$
Eingänge $L = 1$
Ausgänge $M = 1$

(d) Besitzt das System einen direkten Durchgriff? Begründen Sie! (1 P)
Nein, das System besitzt keinen direkten Durchgriff, da in der Impulsantwort $\gamma_0(n)$ nicht existiert, also der aktuelle Eingang nicht direkt auf den Ausgang wirkt.

(e) Welcher Wert ist am Ausgang zu den Zeitpunkten $n = 0$, $n = 2$ sowie $n = 6$ zu beobachten,wenn es mit dem obigen Signal $v(n)$ angeregt wird? Berechnen Sie! (3 P)

$$y(n) = v(n-1) - \frac{1}{2}v(n-2) - \frac{1}{4}v(n-3) - \frac{1}{8}v(n-4) - \frac{1}{16}v(n-5)$$

1 Punkte pro korrektem Ergebnis.

$$y(0) = \underbrace{v(-1)}_{0} - \frac{1}{2}\underbrace{v(-2)}_{0} - \frac{1}{4}\underbrace{v(-3)}_{0} - \frac{1}{8}\underbrace{v(-4)}_{0} - \frac{1}{16}\underbrace{v(-5)}_{0} = 0$$

$$y(2) = \underbrace{v(1)}_{1} - \frac{1}{2}\underbrace{v(0)}_{1} - \frac{1}{4}\underbrace{v(-1)}_{0} - \frac{1}{8}\underbrace{v(-2)}_{0} - \frac{1}{16}\underbrace{v(-3)}_{0} = 0.5$$

$$y(6) = \underbrace{v(5)}_{0} - \frac{1}{2}\underbrace{v(4)}_{1} - \frac{1}{4}\underbrace{v(3)}_{1} - \frac{1}{8}\underbrace{v(2)}_{1} - \frac{1}{16}\underbrace{v(1)}_{1} = -0.9375$$

Teil 2 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 gelöst werden.*

Im Folgenden ist ein lineares, zeitinvariantes, durchgriffsfreies System in der Zustandsraumdarstellung gegeben durch die Systemmatrix $\boldsymbol{A}$, den Eingangsvektor $\boldsymbol{b}$, sowie den Ausgangsvektor $\boldsymbol{c}$ und den Durchgriff d.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0.5 & 2 & 0 \\ 0 & 0.4 & 1 \\ 0 & 0 & 0.3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad d = 0$$

(f) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $H(z)$ des Systems. (9.5 P)
1 Punkt für folgende Gleichung:

$$H(z) = \boldsymbol{c}\,(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\,\boldsymbol{b} + d$$

5 Punkt für $(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}$.
1 Punkt für Aufstellen $z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$.
1 Punkt für $det(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$.
3 Punkt für richtiges Ergebnis der Inversen.

$$(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{z-0.5} & \frac{2}{(z-0.5)(z-0.4)} & \frac{2}{(z-0.5)(z-0.4)(z-0.3)} \\ 0 & \frac{1}{z-0.4} & \frac{1}{(z-0.4)(z-0.3)} \\ 0 & 0 & \frac{1}{z-0.3} \end{bmatrix}$$

1.5 Punkte für korrektes lösen $\boldsymbol{c}\,(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}$ (0.5 pro korrektem Term in Ergebnis Vektor).

$$\boldsymbol{c}\,(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{z-0.5} & -\frac{2}{(z-0.5)(z-0.4)} & -\frac{2}{(z-0.5)(z-0.4)(z-0.3)} \end{bmatrix}$$

2 Punkte für korrektes lösen $\boldsymbol{c}\,(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\,\boldsymbol{b}$.

$$\boldsymbol{c}\,(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\,\boldsymbol{b} = -\frac{2}{(z-0.5)(z-0.4)(z-0.3)} - \frac{1}{2(z-0.5)}$$

(g) Ist das gegebene System stabil? Begründen Sie! (1 P)

Das gegebene System ist stabil, da alle Pole innerhalb des Einheitskreises liegen.

(h) Bestimmen Sie die Differenzengleichung des gegebenen System. (9 P)

$H(z)$ auf gemeinsamen Nenner bringen: 1 Punkt

$$\begin{aligned} H(z) &= -\frac{2}{(z-0.5)(z-0.4)(z-0.3)} - \frac{1}{2(z-0.5)} \\ &= \frac{-2-0.5(z-0.4)(z-0.3)}{(z-0.5)(z-0.4)(z-0.3)} \end{aligned}$$

Ausmultiplizieren und zusammenfassen der Terme: 3 Punkte

$$H(z) = \frac{-2.06+0.35z-0.5z^2}{z^3-1.2z^2+0.47z-0.06}$$

Teilen durch z^3: 1 Punkt

$$H(z) = \frac{-2.06z^{-3}+0.35z^{-2}-0.5z^{-1}}{1-1.2z^{-1}+0.47z^{-2}-0.06z^{-3}}$$

Mit

$$H(z) = \frac{Y(z)}{V(z)}$$

ergibt sich: 1 Punkt

$$(-2.06z^{-3}+0.35z^{-2}-0.5z^{-1})V(z) = (1-1.2z^{-1}+0.47z^{-2}-0.06z^{-3})Y(z)$$

Transformieren in den Zeitbereich: 2 Punkte

$$-2.06v(n-3)+0.35v(n-2)-0.5v(n-1) = y(n)-1.2y(n-1)+0.47y(n-2)-0.06y(n-3)$$

Daraus resultiert die Differenzengleichung: 1 Punkt

$$y(n) = 1.2y(n-1)-0.47y(n-2)+0.06y(n-3)-2.06v(n-3)+0.35v(n-2)-0.5v(n-1)$$

Aufgabe 3 (33 Punkte)

Teil 1 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 und Teil 3 gelöst werden.*

(a) Was wird unter einer linearen Modulation eines diskreten Signals verstanden? Nennen Sie zwei typische Anwendungsgründe für die Modulation eines Signals. (2 P)

Bei einer linearen Modulation wird ein Nutzsignal durch Multiplikation mit einem Trägersignal spektral verschoben. (1 P)
Typische Anwendungsgründe sind z.B. die Anpassung an einen vorgegebenen Kanal, die gleichzeitige Übertragung mehrerer Signale in unterschiedlichen Frequenzbändern oder die Trennung von Nutz- und Störanteilen im Frequenzbereich. (1 P)

(b) Erläutern Sie den Unterschied zwischen einer Zweiseitenbandmodulation und einer Einseitenbandmodulation. Welche der beiden Modulationsarten benötigt weniger Bandbreite und warum? (3 P)

Bei der Zweiseitenbandmodulation wird das Nutzspektrum durch Multiplikation mit einem Kosinus sowohl auf die positive als auch auf die negative Trägerfrequenz verschoben. Dadurch liegen beide Seitenbänder vor. (1 P)
Bei der Einseitenbandmodulation wird nach der Modulation ein Seitenband durch geeignete Filterung unterdrückt. (1 P)
Die Einseitenbandmodulation benötigt weniger Bandbreite, da nur eines der beiden redundanten Seitenbänder übertragen wird. (1 P)

(c) Worin unterscheiden sich Amplitudenmodulation und Winkelmodulation hinsichtlich der Störanfälligkeit und der benötigten Bandbreite? Nennen Sie jeweils einen Vorteil. (2 P)

Amplitudenmodulation ist vergleichsweise einfach zu realisieren und benötigt meist eine kleinere Bandbreite. (1 P)
Winkelmodulation ist aufwändiger und benötigt im Allgemeinen mehr Bandbreite, kann aber nach der Demodulation ein besseres Signal-zu-Geräusch-Verhältnis erzielen. (1 P)

Teil 2 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und Teil 3 gelöst werden.*

Gegeben sei das in Abb. 1 dargestellte, bandbegrenzte diskrete Signal $x(n) \circ\!\!-\!\!\bullet\, X(e^{j\Omega})$. Für das Signal gilt $0 < \Omega_x < \Omega_\mathrm{T}$ und $\Omega_\mathrm{T} + \Omega_x < \pi$. Das Signal soll zunächst mittels Zweiseitenbandmodulation mit dem Trägersignal $c(n) = 2\cos(\Omega_\mathrm{T} n)$ übertragen werden.

(d) Bestimmen Sie den mathematischen Ausdruck für $X(e^{j\Omega})$ im Bereich $-\pi \leq \Omega \leq \pi$ und geben Sie an, wie dieser Ausdruck für die DTFT außerhalb dieses Bereiches fortgesetzt wird. (3 P)

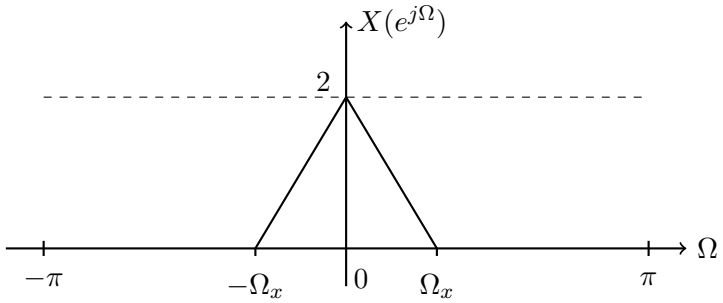


Abbildung 1: Spektrum des Nutzsignals $X(e^{j\Omega})$.

Im Bereich $-\pi \leq \Omega \leq \pi$ gilt

$$X(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 2\left(1 - \frac{|\Omega|}{\Omega_x}\right), & |\Omega| \leq \Omega_x \\ 0, & \Omega_x \leq |\Omega| \leq \pi. \end{cases}$$

(2 P) Funktion und Symmetrie
Das Spektrum der DTFT wird außerhalb des Bereiches $-\pi \leq \Omega \leq \pi$ periodisch mit der Periode 2π fortgesetzt. (1 P)

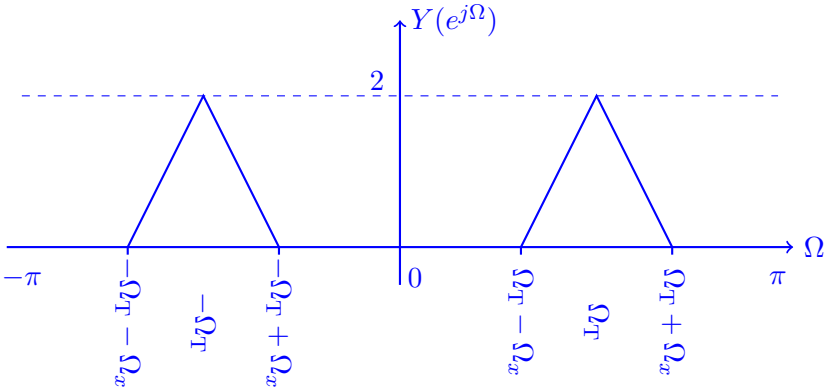
(e) Berechnen Sie das Spektrum $Y(e^{j\Omega})$ des modulierten Signals $y(n) = x(n)c(n)$. (4 P)
Skizzieren Sie $Y(e^{j\Omega})$ im Bereich $-\pi < \Omega < \pi$ und beschriften Sie alle relevanten Frequenzen und Amplituden.

$$y(n) = 2x(n)\cos(\Omega_T n) \qquad (0.5 \text{ P})$$

$$\bullet\!\!-\!\!\circ$$

$$Y(e^{j\Omega}) = X(e^{j(\Omega-\Omega_T)}) + X(e^{j(\Omega+\Omega_T)}). \qquad (2 \text{ P})$$

Da der Faktor 2 im Trägersignal den Faktor $\frac{1}{2}$ der Kosinusmodulation gerade kompensiert, besitzen die verschobenen Spektren dieselbe Amplitude wie $X(e^{j\Omega})$. (0.5 P)
1 P für Skizze: 0.25 P Achsensystem, 0.25 P Lage bei $\pm\Omega_T$, 0.25 P Bandgrenzen $\pm\Omega_T \pm \Omega_x$, 0.25 P Amplitude.



Der zur Verfügung stehende Kanal besitzt nun lediglich den in Abb. 2 dargestellten Durchlassbereich. Der Kanal ist im Durchlassbereich ideal und außerhalb des Durchlassbereiches vollständig sperrend. Außerdem gilt $\Omega_\mathrm{K} = \Omega_\mathrm{T}$ mit $0 \leq \Omega_\mathrm{K} \leq \pi$. Die diskrete Kreisfrequenz ist dabei 2π-periodisch.

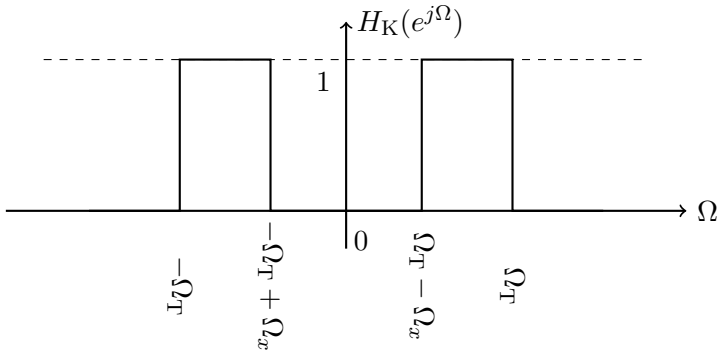


Abbildung 2: Einseitiger Durchlassbereich des Kanals für die positive und negative Frequenzachse.

(f) Welchen Einfluss hat der Kanal $H_\mathrm{K}(e^{j\Omega})$ auf das ZSB-modulierte Signal $Y(e^{j\Omega})$? Kann $x(n)$ aus dem Empfangssignal weiterhin rekonstruiert werden? Erläutern Sie und nennen Sie den wesentlichen Nachteil der ZSB-Modulation für diesen Kanal. (2 P)

Der Kanal lässt auf der positiven Frequenzachse nur das untere Seitenband $\Omega_\mathrm{T} - \Omega_x \leq \Omega \leq \Omega_\mathrm{T}$ durch und unterdrückt das obere Seitenband $\Omega_\mathrm{T} \leq \Omega \leq \Omega_\mathrm{T} + \Omega_x$; auf der negativen Frequenzachse gilt das symmetrische Gegenstück. (0.5 P)
Da reelle Signale konjugiert-symmetrische Spektren besitzen, enthält das verbleibende Seitenband die vollständige Information. Eine Rekonstruktion durch kohärente Demodulation mit $2\cos(\Omega_\mathrm{T} n)$ und anschließende Tiefpassfilterung ist weiterhin möglich. (1 P)
Nachteil: Die ZSB-Modulation belegt die doppelte Kanalbreite ($2\Omega_x$ statt Ω_x); das obere Seitenband wird vollständig verschwendet. (0.5 P)

(g) Entwickeln Sie eine bandbreiteneffiziente Sender- und Empfängerstruktur, die den Kanal $H_\mathrm{K}(e^{j\Omega})$ vollständig ausnutzt und dabei nur ein Seitenband sendet. Geben Sie die benötigten Filter im Frequenzbereich an und zeigen Sie rechnerisch, dass am Ausgang wieder $X(e^{j\Omega})$ entsteht. Gehen Sie von idealen Filtern und einem idealen Kanal im Durchlassbereich aus. (6 P)

Eine geeignete Lösung ist eine Einseitenbandübertragung. Zunächst wird mit $2\cos(\Omega_\mathrm{T} n)$ moduliert. Anschließend wird auf der positiven Frequenzachse das untere Seitenband und auf der negativen Frequenzachse das dazu symmetrische Seitenband ausgewählt. (1 P)

Der sendeseitige Filter kann z.B. als

$$H_{\mathrm{S}}(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 1, & \Omega_{\mathrm{T}} - \Omega_x \leq \Omega \leq \Omega_{\mathrm{T}} \\ 1, & -\Omega_{\mathrm{T}} \leq \Omega \leq -\Omega_{\mathrm{T}} + \Omega_x \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

gewählt werden. (1 P)
Damit ergibt sich nach Modulation, Filterung und Kanal

$$R(e^{j\Omega}) = X_{\mathrm{neg}}(e^{j(\Omega-\Omega_{\mathrm{T}})}) + X_{\mathrm{pos}}(e^{j(\Omega+\Omega_{\mathrm{T}})}),$$

wobei $X_{\mathrm{pos}}(e^{j\Omega})$ die positiven und $X_{\mathrm{neg}}(e^{j\Omega})$ die negativen Frequenzanteile des Nutzsignals beschreibt. (1.5 P)
Empfangsseitig erfolgt eine kohärente Demodulation mit $2\cos(\Omega_{\mathrm{T}} n)$. Dadurch entsteht

$$Z(e^{j\Omega}) = X(e^{j\Omega}) + X_{\mathrm{neg}}(e^{j(\Omega-2\Omega_{\mathrm{T}})}) + X_{\mathrm{pos}}(e^{j(\Omega+2\Omega_{\mathrm{T}})})..$$

(1.5 P)
Die Anteile um $\pm 2\Omega_{\mathrm{T}}$ werden durch einen idealen Tiefpass entfernt:

$$H_{\mathrm{TP}}(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 1, & |\Omega| \leq \Omega_x \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Somit gilt für das rekonstruierte Signal $\hat{X}(e^{j\Omega}) = Z(e^{j\Omega})H_{\mathrm{TP}}(e^{j\Omega}) = X(e^{j\Omega})$. (1 P)

Teil 3 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und Teil 2 gelöst werden.*

Gegeben ist das kontinuierliche winkelfrequenzmodulierte Signal

$$c_{\mathrm{T}}(t) = \hat{c}_{\mathrm{T}} \cos\left(2\pi f_{\mathrm{T}} t + k_{\mathrm{FM}} 2\pi \int_{\tau=-\infty}^{t} v(\tau) d\tau\right).$$

Für das Nutzsignal gelte

$$v(t) = \begin{cases} 2\,\mathrm{V}, & 0\,\mathrm{s} \leq t < 1\,\mathrm{s} \\ -1\,\mathrm{V}, & 1\,\mathrm{s} \leq t < 3\,\mathrm{s} \\ 0\,\mathrm{V}, & 3\,\mathrm{s} \leq t < 4\,\mathrm{s} \\ 1\,\mathrm{V}, & 4\,\mathrm{s} \leq t < 6\,\mathrm{s} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(h) Bestimmen Sie die Momentanphase $\Phi_{\mathrm{T}}(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Achten Sie auf einen stetigen Verlauf der Phase. (4 P)
Hinweis: Bei der Fallunterscheidung ist auch das korrekte Verwenden der zugehörigen Einheiten notwendig, da diese mit bewertet werden.

Es gilt

$$\Phi_{\mathrm{T}}(t) = 2\pi f_{\mathrm{T}} t + k_{\mathrm{FM}} 2\pi \int_{\tau=-\infty}^{t} v(\tau) d\tau. \quad (1\ \mathrm{P})$$

Damit folgt

$$\Phi_\mathrm{T}(t) = 2\pi f_\mathrm{T} t + k_\mathrm{FM} 2\pi \begin{cases} 0\,\mathrm{Vs}, & t < 0\,\mathrm{s} \\ 2\,\mathrm{V}\,t, & 0\,\mathrm{s} \leq t < 1\,\mathrm{s} \\ 3\,\mathrm{Vs} - 1\,\mathrm{V}\,t, & 1\,\mathrm{s} \leq t < 3\,\mathrm{s} \\ 0\,\mathrm{Vs}, & 3\,\mathrm{s} \leq t < 4\,\mathrm{s} \\ -4\,\mathrm{Vs} + 1\,\mathrm{V}\,t, & 4\,\mathrm{s} \leq t < 6\,\mathrm{s} \\ 2\,\mathrm{Vs}, & t \geq 6\,\mathrm{s}. \end{cases}$$

(3 P)

(i) Leiten Sie die Momentan-Kreisfrequenz $\Omega_\mathrm{T}(t)$ des Signals $c_\mathrm{T}(t)$ her und geben Sie die maximale Abweichung von der Träger-Kreisfrequenz an. (3 P)

$$\begin{aligned} \Omega_\mathrm{T}(t) &= \frac{d\Phi_\mathrm{T}(t)}{dt} \\ &= 2\pi f_\mathrm{T} + k_\mathrm{FM} 2\pi v(t). \end{aligned}$$

(2 P)

Die maximale Abweichung von der Träger-Kreisfrequenz ist

$$\Delta\Omega_\mathrm{max} = k_\mathrm{FM} 2\pi \cdot 2\,\mathrm{V}.$$

(1 P)

(j) Erklären Sie, welcher Verarbeitungsschritt geändert werden muss, um aus der Frequenzmodulation eine Phasenmodulation zu erhalten. (2 P)

Bei der Frequenzmodulation wird das Nutzsignal vor der Phasenmodulation integriert. (1 P)
Für eine Phasenmodulation wird dieser Integrierer vor der Modulation entfernt, sodass das Nutzsignal direkt die Phase beeinflusst. (1 P)

(k) Bewerten Sie für einen stark amplitudengestörten, aber ausreichend breitbandigen Kanal, ob eher eine AM- oder eine FM-Übertragung geeignet ist. Begründen Sie Ihre Entscheidung kurz. (2 P)

Bei stark amplitudengestörtem Kanal ist eine FM- bzw. allgemeiner eine Winkelmodulation geeigneter, da die Information nicht in der Amplitude, sondern in der Momentanfrequenz bzw. Phase liegt. (1 P)
Die Voraussetzung ist, dass genügend Bandbreite vorhanden ist und der Kanal oberhalb der FM-Schwelle betrieben wird. (1 P)

Dies ist eine leere Seite.