

Signale und Systeme II

Modulklausur Sommersemester 2025

Prüfer: Prof. Dr.-Ing. Gerhard Schmidt

Datum: 01.09.2025

Name: _____

Matrikelnummer: _____

Erklärung der Kandidatin/des Kandidaten vor Beginn der Prüfung

Hiermit bestätige ich, dass ich zur Prüfung angemeldet und zugelassen bin und dass ich prüfungsfähig bin.

Ich nehme zur Kenntnis, dass der Termin für die Klausureinsicht vom Prüfungsamt ET&IT bekannt gegeben wird, sobald mein vorläufiges Prüfungsergebnis im QIS-Portal veröffentlicht wurde. Nach dem Einsichtnahmetermin kann ich meine endgültige Note im QIS-Portal abfragen. Bis zum Ende der Widerspruchsfrist des zweiten Prüfungszeitraums der CAU kann ich beim Prüfungsausschuss Widerspruch gegen dieses Prüfungsverfahren einlegen. Danach wird meine Note rechtskräftig.

Unterschrift: _____

Korrektur

Aufgabe	1	2	3
Punkte	/31	/34	/35

Summe der Punkte: _____ /100

Einsicht/Rückgabe

Hiermit bestätige ich, dass ich die Korrektur der Klausur eingesehen habe und mit der auf diesem Deckblatt vermerkten Bewertung einverstanden bin.

- ☐ Die Klausurunterlagen verbleiben bei mir. Ein späterer Einspruch gegen die Korrektur und Benotung ist nicht mehr möglich.

Kiel, den _____ Unterschrift: _____

Signale und Systeme II

Modulklausur Sommersemester 2025

Prüfer: Prof. Dr.-Ing. Gerhard Schmidt
Ort: LS1, Klaus-Murmann-Hörsaal
Datum: 01.09.2025
Beginn: 09:00 h
Einlesezeit: 10 Minuten
Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Hinweise

- Legen Sie Ihren Studierendenausweis oder Personalausweis zur Überprüfung bereit.
- Schreiben Sie auf **jedes** abzugebende Blatt deutlich Ihren **Namen** und Ihre **Matrikelnummer**. Dabei verwenden Sie bitte für **jede Aufgabe** der Klausur einen **neuen Papierbogen**. Zusätzliches Papier erhalten Sie auf Anfrage.
- Verwenden Sie zum Schreiben **weder Bleistift noch Rotstift**.
- Alle Hilfsmittel – außer solche, die die Kommunikation mit anderen Personen ermöglichen – sind erlaubt. Nicht zugelassene Hilfsmittel sind außer Reichweite aufzubewahren und auszuschalten.
- Die direkte Kommunikation mit Personen, die nicht der Klausuraufsicht zuzuordnen sind, ist grundsätzlich ebenfalls untersagt.
- Lösungswege müssen zur Vergabe der vollen Punktzahl immer nachvollziehbar und mit Begründung versehen sein. Sind Funktionen zu skizzieren, müssen grundsätzlich alle Achsen beschriftet werden. Beachten Sie, dass die Punkteverteilung in den Teilaufgaben nur vorläufig ist!
- Sollten Sie sich während der Klausur durch äußere Umstände bei der Bearbeitung der Klausur beeinträchtigt fühlen, ist dies unverzüglich gegenüber der Klausuraufsicht zu rügen.
- 5 Minuten und 1 Minute vor Klausurende werden Ankündigungen gemacht. Wird das **Ende der Bearbeitungszeit** angesagt, darf **nicht mehr geschrieben** werden.
- Legen Sie am Ende der Klausur alle Lösungsbögen ineinander (so, wie sie ausgeteilt wurden) und geben Sie auch die Aufgabenblätter und das **Deckblatt mit Ihrer Unterschrift** mit ab.
- Bevor alle Klausuren eingesammelt sind, darf weder der Sitzplatz verlassen noch geredet werden. Jede Form der Kommunikation wird zu diesem Zeitpunkt noch als **Täuschungsversuch** gewertet.
- Während der **Einlesezeit ist die Bearbeitung der Aufgaben untersagt**, dementsprechend sind alle Schreibutensilien oder Hilfsmittel beiseitezulegen. Jede Zuwiderhandlung wird als **Täuschungsversuch** geahndet.

Aufgabe 1 (31 Punkte)

Teil 1 Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 und 3 gelöst werden.

Gegeben sind die vier Funktionen:

$$F_a(a) = \begin{cases} 1, & \text{für } 1 \leq a < 2 \\ \frac{1}{2}, & \text{für } 2 \leq a < 3 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad F_c(c) = \begin{cases} 0, & \text{für } c < -1 \\ c, & \text{für } -1 \leq c < 1 \\ 1, & \text{für } c \geq 1 \end{cases}$$

$$F_b(b) = \begin{cases} 0, & \text{für } b < 1 \\ \frac{1}{8}(b-1)^3, & \text{für } 1 \leq b < 3 \\ 1, & \text{für } b \geq 3 \end{cases} \quad F_d(d) = \begin{cases} d^2, & \text{für } 0 \leq d < 2 \\ 1, & \text{für } d \geq 2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- (a) Bei welchen der obigen Funktionen können Sie ausschließen, dass es sich dabei um Verteilungsfunktionen kontinuierlicher Zufallsgrößen handelt? Begründen Sie Ihre Antwort! Identifizieren Sie zudem die Funktionen, bei denen es sich um Verteilungsfunktionen handelt. (4 P)

Hinweis: Es können eine oder mehrere Verteilungsfunktionen vorliegen.

$F_a(a)$ und $F_d(d)$ sind nicht monoton steigend und können deshalb keine Verteilungsfunktion sein. $F_c(c)$ hat negative Werte und kann deshalb keine Verteilungsfunktion sein. $F_b(b)$ ist eine Verteilungsfunktion.

- (b) Bestimmen Sie zur Verteilungsfunktion $F_b(b)$ die dazugehörige Wahrscheinlichkeitsdichte. Geben Sie dabei den Zusammenhang zwischen der Verteilungsfunktion und der Wahrscheinlichkeitsdichte an. (4 P)

Es gilt $f_b(b) = \frac{d}{db}F_b(b)$.

$$f_b(b) = \begin{cases} \frac{3}{8}(b-1)^2, & \text{für } 1 \leq b < 3, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- (c) Bestimmen Sie zur Verteilungsfunktion $F_b(b)$ das erste Moment, das zweite Moment und das zweite zentrale Moment. (7 P)

$$\begin{aligned}m_b^{(1)} = m_b &= \int_{-\infty}^{\infty} b f_b(b) db \\&= \int_1^3 \frac{3}{8} b(b-1)^2 db\end{aligned}$$

Substituiere: $u = b - 1 \rightarrow \frac{du}{db} = 1$

$$\begin{aligned}&= \frac{3}{8} \int_{u(1)=0}^2 (u+1)u^2 du \\&= \frac{3}{8} \int_0^2 u^3 + u^2 du \\&= \frac{3}{8} \left[\frac{1}{4}u^4 + \frac{1}{3}u^3 \right]_0^2 \\&= \frac{5}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}m_b^{(2)} &= \int_{-\infty}^{\infty} b^2 f_b(b) db \\&= \int_1^3 \frac{3}{8} b^2 (b-1)^2 db\end{aligned}$$

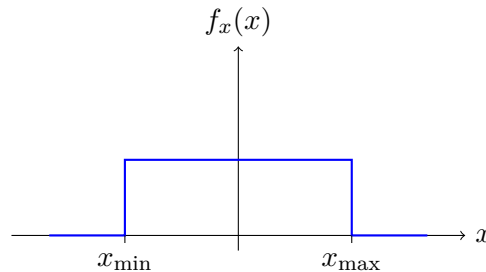
Ausmultiplizieren

$$\begin{aligned}&= \frac{3}{8} \left(\int_1^3 b^4 - 2b^3 + b^2 \right) db \\&= \frac{3}{8} \left[\frac{1}{5}b^5 - \frac{1}{2}b^4 + \frac{1}{3}b^3 \right]_1^3 \\&= \frac{32}{5}\end{aligned}$$

$$\sigma_b^2 = m_b^{(2)} - m_b^2 = \frac{3}{20}$$

Teil 2 Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und 3 gelöst werden.

Gegeben sei die Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_{\max} - x_{\min}}, & \text{für } x_{\max} \leq x \leq x_{\min} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$
 von gleichverteiltem weißem kontinuierlichem Rauschen mit $|x_{\max}| = |x_{\min}|$.

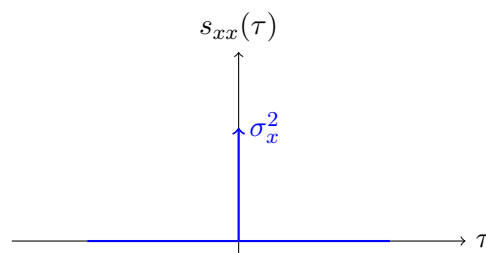


- (d) Geben sie den Mittelwert m_x sowie die Varianz σ_x^2 des Signals $x(t)$ an. Skizzieren Sie zudem dessen Autokorrelationsfunktion $s_{xx}(\tau)$ mit allen notwendigen Angaben. (6 P)

$$m_x = \frac{x_{\max} + x_{\min}}{2} = 0$$

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{12}(x_{\max} - x_{\min})^2$$

Die Autokorrelationsfunktion kann nach: $s_{xx}(\tau) = m_x^2 + \sigma_x^2 \cdot \gamma_0(\tau)$ skizziert werden



- (e) Wann sind zwei Prozesse orthogonal? Was müsste für das Signal $y(t)$ gelten, damit die Kreuzkorrelation $s_{x,y}(t_1, t_2)$ orthogonal ist? (2 P)

Zwei Signal sind orthogonal, wenn folgende Bedingung für die Kreuzkorrelation gilt

$$s_{x,y}(t_1, t_2) = 0$$

Da bereits $x(t)$ mittelwertfrei ist, reicht es aus wenn die Signale $x(t)$ und $y(t)$ unkorreliert sind.

- (f) Was bedeutet Stationarität? (1 P)

Stationarität bedeutet, dass die statistischen Eigenschaften des Signals sich mit der Zeit nicht ändern.

- (g) Was bedeutet Ergodizität? Was für eine Voraussetzung muss für ein Signal gelten damit es ergodisch ist? (2 P)

Ergodizität bedeutet, dass die Scharmittelwerte mit den Zeitmittelwerten übereinstimmen. Ergodizität setzt voraus, dass ein Signal stationär ist.

- (h) Erklären Sie den Unterschied zwischen einem deterministischen Signal und einem stochastischen Signal. (2 P)

Ein deterministisches Signal ist vollständig vorhersagbar und lässt sich exakt mathematisch beschreiben. Ein stochastisches Signal ist nicht vollständig vorhersagbar. Es enthält zufällige Komponenten.

Teil 3 Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und 2 gelöst werden.

Gegeben seien die Zufallsvariablen x und y mit der dazugehörigen Verbundwahrscheinlichkeitsdichte $f_{x,y}(x, y)$:

$$f_{x,y}(x, y) = \begin{cases} 12x^2y & \text{für } 0 \leq x \leq 1, \frac{1}{3} \leq y \leq \frac{2}{3}, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

(i) Bestimmen Sie die dazugehörigen Randdichten $f_x(x)$ und $f_y(y)$. (3 P)

$$f_x(x) = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} f_{x,y}(x, y) dy = \begin{cases} 2x^2, & \text{für } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f_y(y) = \int_0^1 f_{x,y}(x, y) dx = \begin{cases} 4y, & \text{für } \frac{1}{3} \leq y \leq \frac{2}{3} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 2 (34 Punkte)

Teil 1 *Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 gelöst werden.*

Gegeben sei folgende Differenzengleichung eines linearen zeitinvarianten Systems mit Eingang $v(n)$ und Ausgang $y(n)$

$$y(n) - \frac{3}{4}y(n-1) + \frac{1}{8}y(n-2) = v(n) + 2v(n-1) .$$

(a) Ist das gegebene System kausal? Begründen Sie. (1 P)

Da nur aktuelle und vergangene Werte verwendet werden ist das System kausal.

(b) Wie lautet die Übertragungsfunktion $H(z)$ des Systems? (4 P)

$$H(z) = \frac{Y(z)}{V(z)} = \frac{1 + 2z^{-1}}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}}$$

(c) Wie lautet die Impulsantwort des Systems? (10 P)

Nutzen der Übertragungsfunktion aus vorigem Aufgabenteil:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{V(z)} = \frac{1 + 2z^{-1}}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}}$$

Multiplizieren mit z^2 :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{V(z)} = \frac{z^2 + 2z}{z^2 - \frac{3}{4}z + \frac{1}{8}}$$

Anwendung der Partialbruchzerlegung:
Bestimmen der Nullstellen des Nenners:

$$z^2 - \frac{3}{4}z + \frac{1}{8} = 0$$

Nutzen der pq-Formel:

$$z_0 = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

mit $p = -\frac{3}{4}$ und $q = \frac{1}{8}$

$$z_0 = \frac{3}{8} \pm \sqrt{\left(-\frac{3}{8}\right)^2 - \frac{1}{8}}$$

$z_{0,1} = \frac{1}{2}$, $z_{0,2} = \frac{1}{4}$.

Darstellung in Partialbrüchen:

$$H(z) = \frac{z^2 + 2z}{(z - \frac{1}{2})(z - \frac{1}{4})}$$

Partialbruchzerlegung:

$$H(z) = B_0 + \sum_{\mu=1}^k \frac{B_\mu z}{z - z_{\infty,\mu}}$$

$$B_0 = H(0) = \frac{\alpha_0}{\beta_0}$$

$$B_0 = H(0) = 0$$

$$B_\mu = \lim_{z \rightarrow z_{\infty,\mu}} \left[\frac{H(z)}{z} (z - z_{\infty,\mu}) \right]$$

Berechnung von B_1 mit $z_{\infty,1} = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} B_1 &= \lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}} \left[\frac{H(z)}{z} (z - \frac{1}{2}) \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}} \left[\frac{z+2}{(z - \frac{1}{2})(z - \frac{1}{4})} (z - \frac{1}{2}) \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}} \left[\frac{z+2}{(z - \frac{1}{4})} \right] \\ &= \frac{\frac{10}{4}}{\frac{1}{4}} = 10 \end{aligned}$$

Berechnung von B_2 mit $z_{\infty,2} = \frac{1}{4}$

$$\begin{aligned} B_1 &= \lim_{z \rightarrow \frac{1}{4}} \left[\frac{H(z)}{z} (z - \frac{1}{4}) \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow \frac{1}{4}} \left[\frac{z+2}{(z - \frac{1}{2})(z - \frac{1}{4})} (z - \frac{1}{4}) \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow \frac{1}{4}} \left[\frac{z+2}{(z - \frac{1}{2})} \right] \\ &= \frac{\frac{9}{4}}{-\frac{1}{4}} = -9 \end{aligned}$$

Daraus folgt die Darstellung der Übertragungsfunktion in Partialbrüchen

$$H(z) = 0 + \frac{10z}{z - \frac{1}{2}} - \frac{9z}{z - \frac{1}{4}}$$

Unter Nutzung von

$$h_0(n) = B_0 \gamma_0(n) + \sum_{\mu=1}^k B_{\mu} z_{\infty, \mu}^n \gamma_{-1}(n)$$

ergibt sich durch Einsetzen der Koeffizienten

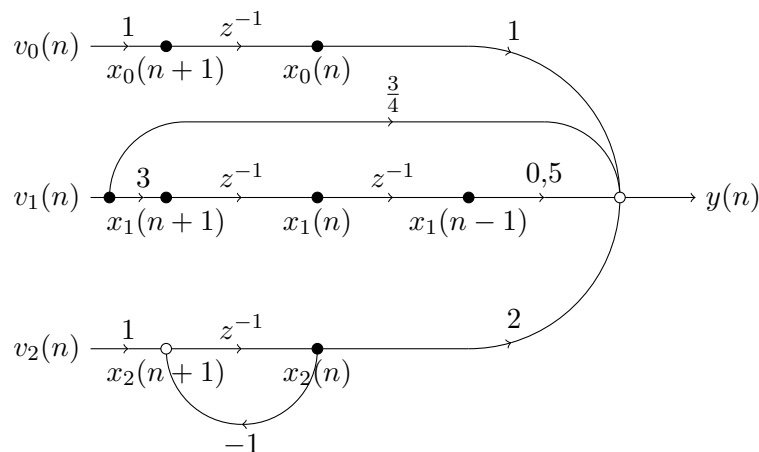
$$h_0(n) = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \gamma_{-1}(n) - 9 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n \gamma_{-1}(n)$$

Teil 2 Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und gelöst werden.

Das Zustandsraummodell sei durch die folgenden Zustandsgleichungen beschrieben:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(n+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(n) + \mathbf{B}\mathbf{v}(n), \\ \mathbf{y}(n) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(n) + \mathbf{D}\mathbf{v}(n). \end{aligned}$$

Folgendes System ist in Form des Signalflussgraphen gegeben:



- (d) Geben Sie die Anzahl an Eingängen, Ausgängen, sowie Zuständen an und bestimmen Sie die Dimensionen der Dynamikmatrix $\mathbf{A}$, der Eingangsmatrix $\mathbf{B}$, der Ausgangsmatrix $\mathbf{C}$, sowie die Dimensionen der Durchgriffmatrix $\mathbf{D}$. Definieren Sie hierfür den Zustandsvektor $\mathbf{x}(n)$. (4,5 P)

$$\mathbf{x}(n) = \begin{bmatrix} x_0(n) \\ x_1(n-1) \\ x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix}$$

Eingänge := 3

Ausgänge := 1

Zustände := 4

$$\mathbf{A} := [4 \times 4]$$

$$\mathbf{B} := [4 \times 3]$$

$$\mathbf{C} := [1 \times 4]$$

$$\mathbf{D} := [1 \times 3]$$

- (e) Bestimmen Sie die Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ die Eingangsmatrix $\mathbf{B}$, die Ausgangsmatrix $\mathbf{C}$, sowie die Durchgriffsmatrix $\mathbf{D}$. (4,5 P)

Die Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ stellt den Einfluss vergangener Zustände auf aktuelle Zustände dar.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Die Eingangsmatrix $\mathbf{B}$ beschreibt den Einfluss der Eingänge auf die Zustände.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Die Ausgangsmatrix $\mathbf{C}$ beschreibt den Einfluss der Zustände auf den Ausgang.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Die Durchgriffsmatrix $\mathbf{D}$ beschreibt den direkten Durchgriff der Eingänge auf den Ausgang.

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

- (f) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $H(z)$. (10 P)

Hinweis: sollten Sie die Inverse $(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ nicht berechnen können, können Sie mit

folgendem Ergebnis weiterrechnen:

$$(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{z^2} & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{1}{z} & \frac{1}{z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{z} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2z-1} \end{bmatrix}$$

Das lösen der Aufgabe mit obigem Ergebnis als Hilfestellung führt zu einer maximal erreichbaren Punkteanzahl von (6 P) anstelle der ursprünglichen (10 P) für diesen Aufgabenteil!

Berechnen der Übertragungsfunktion $\mathbf{H}(z)$

$$\mathbf{H}(z) = \mathbf{C} (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} .$$

Zwischenschritt 1:

$$z\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z & -1 & 0 \\ 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z+1 \end{bmatrix}$$

Zwischenschritt 2:

$$(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z & -1 & 0 \\ 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z+1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Invertieren durch Umformen zur Einheitsmatrix

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} z & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z+1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Zeile 1: Division durch z

Zeile 3: Division durch z

Zeile 4: Division durch $z+1$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{z+1} \end{array} \right]$$

Addition Zeile 2 + Zeile 3

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{z} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{z+1} \end{array} \right]$$

Division Zeile 2 durch z

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{z} & \frac{1}{z^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{z+1} \end{array} \right]$$

Daraus resultiert:

$$(zI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{z} & \frac{1}{z^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{z+1} \end{bmatrix}$$

Zwischenschritt 3:

$$\begin{aligned} C(zI - A)^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{z} & \frac{1}{z^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{z+1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{z} & \frac{1}{2z} & \frac{1}{2z^2} & \frac{2}{z+1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Zwischenschritt 4:

$$\begin{aligned} C(zI - A)^{-1} B &= \begin{bmatrix} \frac{1}{z} & \frac{1}{2z} & \frac{1}{2z^2} & \frac{2}{z+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{z} & \frac{3}{2z^2} & \frac{2}{z+1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Zwischenschritt 5:

$$\begin{aligned} C(zI - A)^{-1} B + D &= \begin{bmatrix} \frac{1}{z} & \frac{3}{2z^2} & \frac{2}{z+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{z} & \frac{3}{2z^2} + \frac{3}{4} & \frac{2}{z+1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Endresultat:

$$H(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{z} & \frac{6+3z^2}{4z^2} & \frac{2}{z+1} \end{bmatrix}$$

Aufgabe 3 (35 Punkte)

Teil 1 Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 und Teil 3 gelöst werden.

- (a) Was wird unter der Modulation eines Signals verstanden? Nennen Sie mindestens drei verschiedene Modulationsarten. (2,5 P)

Unter der Modulation eines Signals wird die spektrale Verschiebung eines Nutzsingals anhand eines Trägersignals verstanden.

Modulationsarten: Amplitudenmodulation (AM), Phasenmodulation (PM) und Frequenzmodulation (FM).

Teil 2 Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und Teil 3 gelöst werden.

Gegeben sei das in Abb. 1 abgebildete, bandbegrenzte Signal $V(e^{j\Omega})$ mit maximalen Frequenz von f_v [Hz], welches mit einer Abtastrate f_S [Hz] abgetastet wurde. Hierbei wurde das diskrete Spektrum mit $\Omega = 2\pi f/f_S$ [rad] normiert.

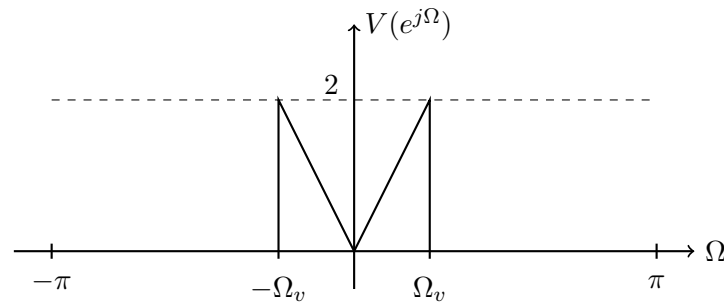


Abbildung 1: Spektrum von $V(e^{j\Omega})$.

- (b) Welche Bedingung muss die Kreisfrequenz Ω_v erfüllen, damit kein Aliasing auftritt und welcher Frequenzbereich ist dann zur Betrachtung des Signals ausreichend, um dieses eindeutig zu beschreiben? (2 P)

Das Abtasttheorem lautet $f_S \geq 2 \cdot f_{\max}$. Daraus ergibt sich eine Nyquist-Frequenz von $f_{\max} = \frac{f_S}{2}$. Normiert ergibt sich $\Omega_{\max} = 2\pi f_{\max}/f_S = 2\pi \frac{f_S}{2}/f_S = \pi$. D.h. die maximal im Signal vorkommende Kreisfrequenz muss kleiner gleich sein als π .

Ausreichende Antwort:

Für die Kreisfrequenz muss $\Omega_v \leq \pi$ erfüllt sein.

Der relevante Frequenzbereich liegt bei $\Omega \in [-\pi, \pi]$.

- (c) Schauen Sie sich Abb. 1 an und bestimmen Sie den Ausdruck $V(e^{j\Omega})$, also die DTFT dieses Signals in Abhängigkeit von der normierten Kreisfrequenz Ω . (2 P)

Tipp: Denken sie an die Periodizität im Spektrum der DTFT.

$$V(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 2 \cdot \left| \frac{\Omega - \lambda \cdot 2\pi}{\Omega_v} \right| & \text{für } \lambda \cdot 2\pi - \Omega_v \leq \Omega \leq \lambda \cdot 2\pi + \Omega_v \text{ mit } \lambda \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- (d) Das Signal $v(n) \circ \bullet V(e^{j\Omega})$ wird nun mit dem Trägersignal $c_1(n) = \cos(\Omega_T n)$ moduliert. Für die Trägerfrequenz gilt $\Omega_v \ll \Omega_T$ und $\Omega_T + \Omega_v \leq \pi$. Das daraus resultierende Spektrum wird mit $U(e^{j\Omega})$ notiert. Um welche Modulationsart handelt es sich hierbei? (1 P)

Bei der hier angewandten Modulation handelt es sich um eine Zweiseitenband-Modulation (kurz ZSB-Modulation).

- (e) Berechnen Sie das Spektrum $U(e^{j\Omega})$ des modulierten Signals und skizzieren Sie dieses im Bereich $-\pi < \Omega < \pi$. (5 P)

*Tipp: Bereits das Skizzieren des **richtig beschrifteten** Achsensystems erbringt Punkte. Achten Sie hierbei vor allem auf die Art der Transformation und die Notation aller entsprechenden Größen.*

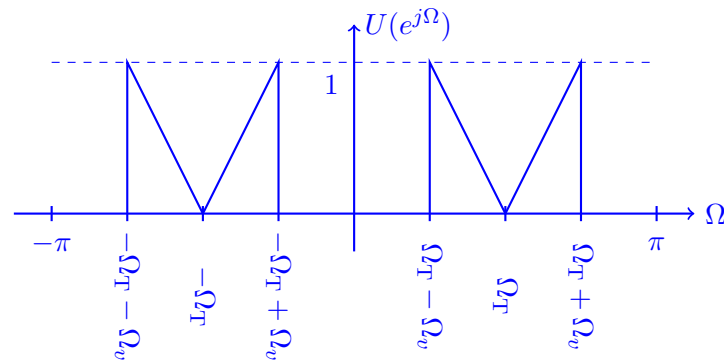
$$\begin{aligned} u(n) &= v(n) \cdot c_1(n) \\ &\quad \circ \bullet \\ U(e^{j\Omega}) &= \mathcal{F}\{v(n) \cdot c_1(n)\} \\ &= \mathcal{F}\{v(n) \cdot \cos(\Omega_T n)\} \end{aligned}$$

Anwenden der Korrespondenz für Kosinus-Therme und einer Multiplikation im Zeitbereich:

$$\cos(\Omega_v n) \circ \bullet \pi \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} [\delta_0(\Omega + \Omega_v - 2\pi\lambda) + \delta_0(\Omega - \Omega_v - 2\pi\lambda)]$$

$$\begin{aligned} U(e^{j\Omega}) &= \frac{1}{2\pi} V(e^{j\Omega}) \circ \bullet \pi \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} [\delta_0(\Omega + \Omega_T - 2\pi\lambda) + \delta_0(\Omega - \Omega_T - 2\pi\lambda)] \\ &= \frac{1}{2} [V(e^{j(\Omega+\Omega_T)}) + V(e^{j(\Omega-\Omega_T)})] \end{aligned}$$

0.5 für richtige Zeitbereichslösung, 0.5 für Umstellen, 0.5 für richtige Kosinuskorrespondenz, 0.5 für richtige Multiplikationskorrespondenz, 1 für komplette Lösung am Ende, 2 für Skizze (0.5 für Achsensystem richtig, 0.5 für Frequenzen und Amplitude richtig, 0.5 pro Signalprojektion richtig)



Das Signal soll nun über einen idealen Kanal unbegrenzter Bandbreite übertragen werden – d.h. $H(e^{j\Omega}) = 1$. Zeitgleich sendet ein anderer Teilnehmer das in Abb. 2 abgebildete Signal, welches somit als Störsignal $b(n)$ additiv in das Empfangssignal einkoppelt. Für die Kreisfrequenz des Störsignals gilt $\Omega_b < \Omega_T - \Omega_v$.

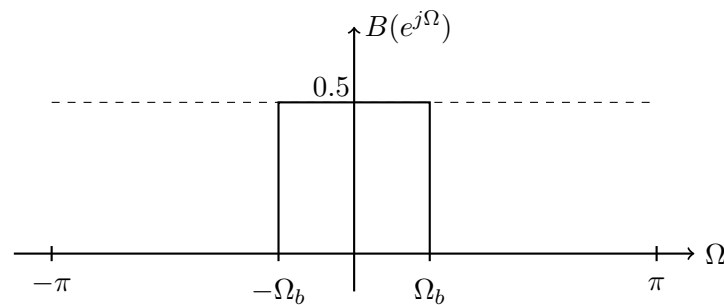


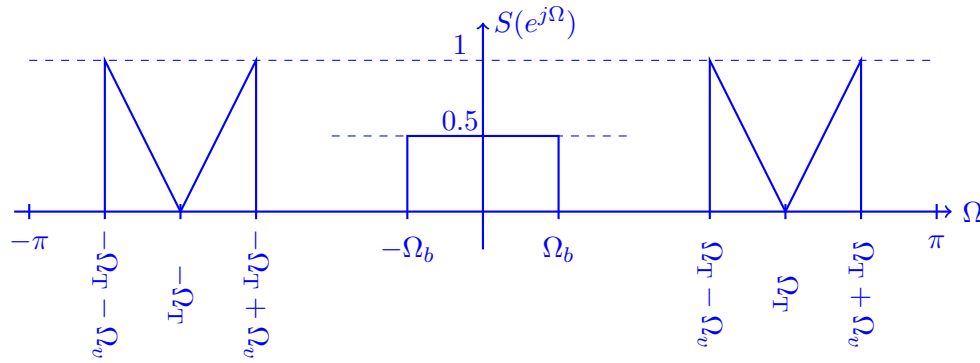
Abbildung 2: Störsignal eines anderen Teilnehmers im Kanal.

- (f) Berechnen Sie das Spektrum des gestörten Empfangssignals $S(e^{j\Omega}) = \mathcal{F}\{s(n)\}$ und skizzieren Sie dieses ebenfalls im Bereich von $-\pi < \Omega < \pi$. (3,5 P)

Für $S(e^{j\Omega}) = \mathcal{F}\{s(n)\}$ ergibt sich

$$S(e^{j\Omega}) = U(e^{j\Omega}) + B(e^{j\Omega})$$

2.5 für Skizze (0.5 für Achsensystem richtig, 0.5 für Frequenzen und Amplitude richtig, 0.5 pro Signalprojektion richtig)



Der andere Kanalteilnehmer hält sich nicht an die Vorgaben und sendet nun so, dass alles unterhalb der Trägerfrequenz Ω_T stark gestört wird. Das Spektrum des Störsignals ist nun nicht mehr an Abb. 2 anzulehnen, sondern kann als beliebig betrachtet werden, da es empfangsseitig unbekannt ist.

- (g) Wie können Sie theoretisch dennoch Ihr gesendetes Signal ideal rekonstruieren? Zeigen Sie rechnerisch Ihr Vorgehen schrittweise und kommentieren Sie Ihre Schritte dabei knapp. Falls Sie Filter verwenden, sind diese im Bereich $-\pi < \Omega < \pi$ zu definieren – außerhalb dieses Bereiches wird Periodizität angenommen. Achten Sie darauf, dass spätestens im letzten Schritt Ihrer Verarbeitung eine Skalierung vorgenommen werden muss, sodass wieder das Nutzsignal $V(e^{j\Omega})$ ungedämpft vorliegt. *Tipp: Die verwendete Modulationsart muss nicht geändert werden. Das Spektrum vom Basisband Signal kann repräsentiert werden durch $V(e^{j\Omega}) = V_{neg}(e^{j\Omega}) + V_{pos}(e^{j\Omega})$, wobei $V_{neg}(e^{j\Omega})$ alle negativen Frequenzanteile von $V(e^{j\Omega})$ und $V_{pos}(e^{j\Omega})$ alle positiven Frequenzanteile von $V(e^{j\Omega})$ beschreibt.* (10 P)

Durch die ZSB-Modulation liegt das Basisbandsignal redundant vor.

1.) Durch eine entsprechende ideale Hochpassfilterung können alle Störanteile vor der Demodulation entfernt werden.

$$H_{HP}(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 1 & \Omega_T \leq |\Omega| \leq \pi \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das daraus resultierende Signal ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} S_{HP}(e^{j\Omega}) &= S(e^{j\Omega}) \cdot H_{HP}(e^{j\Omega}) \\ &= \frac{1}{2} [V_{neg}(e^{j(\Omega+\Omega_T)}) + V_{pos}(e^{j(\Omega-\Omega_T)})] \end{aligned}$$

2.) Kohärente Demodulation mit $c_2(n) = \cos(\Omega_T n)$ liefert das rekonstruierte Spektrum:

$$\begin{aligned}
 Y(e^{j\Omega}) &= \mathcal{F}\{s_{\text{HP}}(n) \cdot c_2(n)\} \\
 &= \frac{1}{2} \underbrace{\left[V_{\text{neg}}(e^{j\Omega}) + V_{\text{pos}}(e^{j\Omega}) \right]}_{V(e^{j\Omega})} + \frac{1}{4} \left[V_{\text{neg}}(e^{j(\Omega+2\Omega_T)}) + V_{\text{pos}}(e^{j(\Omega-2\Omega_T)}) \right] \\
 &= \frac{1}{4} V(e^{j\Omega}) + \frac{1}{4} \left[V_{\text{neg}}(e^{j(\Omega+2\Omega_T)}) + V_{\text{pos}}(e^{j(\Omega-2\Omega_T)}) \right]
 \end{aligned}$$

3.) Tiefpassfilterung, um Störanteile bei den doppelten Trägerfrequenzen zu entfernen:

$$H_{\text{TP}}(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 4 & 0 \leq |\Omega| \leq \Omega_v \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das daraus resultierende Signal ergibt sich zu:

$$\begin{aligned}
 Y_{\text{TP}}(e^{j\Omega}) &= Y(e^{j\Omega}) \cdot H_{\text{TP}}(e^{j\Omega}) \\
 &= 4 \cdot \left[\frac{1}{4} V(e^{j\Omega}) + \underbrace{\frac{1}{4} \left[V_{\text{neg}}(e^{j(\Omega+2\Omega_T)}) + V_{\text{pos}}(e^{j(\Omega-2\Omega_T)}) \right]}_{\text{Eliminiert durch Tiefpass}} \right] \\
 &= V(e^{j\Omega})
 \end{aligned}$$

1 für Erkennen von Notwendigkeit HP, 1 für richtigen HP Aufschrieb, 2 richtiges Ausgangssignal aufgeschrieben, 1 Erkennen kohärenter Demodulation oder Nennung von ESB-Demodulation allgemein, 2 richtiger Aufschrieb von $Y(e^{j\Omega})$, 1 für Erkennen von Notwendigkeit TP, 1 für richtigen TP Aufschrieb, 1 richtiges Ausgangssignal aufgeschrieben

Teil 3 Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und Teil 2 gelöst werden.

Gegeben ist das folgende phasenmodulierte Signal:

$$c(t) = \hat{c}_T \cos[\Phi_T(t)] = \hat{c}_T \cos[2\pi f_T t + \eta \cos(2\pi f_N t)].$$

Dabei ist f_N die Frequenz des Nutzsymbols.

(h) Bestimmen Sie die momentane Kreisfrequenz $\Omega_T(t)$ des Signals $c(t)$. (3 P)

$$\begin{aligned}
 \Omega_T(t) &= \frac{d\Phi_T(t)}{dt} \\
 &= 2\pi f_T - \eta \sin(2\pi f_N t) 2\pi f_N
 \end{aligned}$$

- (i) Geben Sie den Frequenzhub Δf für das Signal $c(t)$. Erklären Sie in eigenen Worten die Bedeutung des Frequenzhubes. (3 P)

$$\Delta f = \eta f_N$$

Der Frequenzhub Δf ist die maximale Abweichung der Momentanfrequenz von der konstanten Trägerfrequenz f_T .

- (j) Geben Sie die minimale und die maximale FM-Bandbreite $f_{B\min}$ und $f_{B\max}$ bei einem Frequenzhub $\Delta f = 40$ kHz für ein Nutzsignal im Bereich von 100 Hz bis 10 kHz. (3 P)

$$\begin{aligned} f_B &= 2 \left(\frac{\Delta f}{f_1} + 2 \right) f_1 \\ f_{B\min} &= 2 \left(\frac{40 \text{ kHz}}{100 \text{ Hz}} + 2 \right) 100 \text{ Hz} = 80,4 \text{ kHz} \\ f_{B\max} &= 2 \left(\frac{40 \text{ kHz}}{10 \text{ kHz}} + 2 \right) 10 \text{ kHz} = 120 \text{ kHz} \end{aligned}$$

Dies ist eine leere Seite.