Signale und Systeme – Modulation

Gerhard Schmidt

Christian-Albrechts-Universität zu Kiel

Technische Fakultät

Elektrotechnik und Informationstechnik

Digitale Signalverarbeitung und Systemtheorie

Gesamtübersicht – Teil 1

- ❑ Signale und Systeme – Einführung
 - ❑ Einführung und Begriffsklärung
 - ❑ Signale
 - ❑ Systeme

- ❑ Signale
 - ❑ Elementarsignale
 - ❑ Reaktion linearer Systeme auf Elementarsignale
 - ❑ Signalzerlegung in Elementarsignale

- ❑ Spektraldarstellungen determinierter Signale
 - ❑ Fourier-Reihe, Diskrete Fourier-Transformation
 - ❑ Fourier-Transformation
 - ❑ Laplace- und z-Transformation

Gesamtübersicht – Teil 2

Lineare Systeme

- Reaktionen auf Elementarsignale
- Reaktionen auf beliebige Signale
- Zusammenhänge zwischen Systemkenngrößen
- Stabilität linearer Systeme
- Gebrochen-rationale Übertragungsfunktionen

Modulation

- Grundlagen
- Lineare Modulation- und Demodulationsverfahren
- Abtasttheorem

Übersicht des nächsten Abschnitts

- Signale und Systeme – Einführung
- Signale
- Spektraldarstellungen determinierter Signale
- Lineare Systeme
- Modulation**
 - Grundlagen
 - Lineare Modulation
 - Zweiseitenband-Modulation
 - Einseitenband-Modulation
 - Amplituden-Modulation
 - Zweiseitenband-Demodulation
 - Einseitenband-Demodulation
 - Amplituden-Demodulation
 - Puls-Amplituden-Modulation und -Demodulation
 - Abtasttheorem

Modulation (Wiederholung):

Aus dem Vorlesungsteil über die Fourier-Transformation sind die Modulationssätze bekannt.
 Folgende Korrespondenzen wurden für ...

□ ... kontinuierliche Signale gefunden:

$$v(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad V(j\omega),$$

$$y_c(t) = v(t) e^{j\omega_T t} \quad \circ \text{---} \bullet \quad V(j(\omega - \omega_T)).$$

□ ... diskrete Signale gefunden:

$$v(n) \quad \circ \text{---} \bullet \quad V(e^{j\Omega}),$$

$$y_c(n) = v(n) e^{j\Omega_T n} \quad \circ \text{---} \bullet \quad V(e^{j(\Omega - \Omega_T)}).$$

Eine Multiplikation mit einer harmonischen Exponentiellen bewirkt eine spektrale Verschiebung um die Trägerfrequenz ω_T bzw. Ω_T . Dies wird als **Modulation** bezeichnet.

... Der Zweck dieser Operation ist die Anpassung des Signalspektrums an den Frequenzbereich des zu nutzenden Übertragungs-, Speicher- oder Verarbeitungsmediums!

Demodulation:

Will man das Signal $v(\dots)$ bzw. das Spektrum $V(\dots)$ aus dem modulierten Signal $y_c(\dots)$ bzw. Spektrum $Y_c(\dots)$ wiedergewinnen, so ist eine erneute Multiplikation mit einer harmonischen Exponentiellen notwendig. Da dieser zweite Modulationsterm mit dem ersten „synchron“ sein muss, wird diese Maßnahme auch als **Synchron-Demodulation** bezeichnet.

Für kontinuierliche Signale gilt:

$$\begin{array}{ccccc}
 y_c(t) e^{-j\omega_T t} & = & v(t) e^{j(\omega_T - \omega_T)t} & = & v(t), \\
 \circ \downarrow & & \circ \downarrow & & \circ \downarrow \\
 Y_c(j(\omega + \omega_T)) & = & V(j(\omega - \omega_T + \omega_T)) & = & V(j\omega).
 \end{array}$$

Für diskrete Signale gilt:

$$\begin{array}{ccccc}
 y_c(n) e^{-j\Omega_T n} & = & v(n) e^{j(\Omega_T - \Omega_T)n} & = & v(n), \\
 \circ \downarrow & & \circ \downarrow & & \circ \downarrow \\
 Y_c(e^{j(\Omega + \Omega_T)}) & = & V(e^{j(\Omega - \Omega_T + \Omega_T)}) & = & V(e^{j\Omega}).
 \end{array}$$

Andere Modulationsverfahren / Lineare Modulation

Andere Modulationsverfahren:

Neben den bisher beschriebenen Modulationsverfahren existieren auch andere Varianten. Hier wird dann eine Anpassung des Signals **nicht** nur bezüglich der Frequenz vorgenommen. Hierbei steht vor allem eine **Verringerung der Fehleranfälligkeit** im Vordergrund.

Lineare Modulation:

Die bisher beschriebene Modulation (siehe die beider vorigen Folien) ist **linear** im Sinne der Definition dieser Vorlesung.

... Aber sie (wie auch alle im Folgenden beschriebenen Modulationsverfahren) ist **nicht verschiebungsinvariant!**

Zweiseitenband-Modulation (ZSB-Modulation) – Teil 1

Verwendung von reellen Trägersignalen:

Verwendet man anstelle von einer harmonischen Exponentiellen einen Cosinus-Modulationsterm, so entstehen folgende Signale:

□ *Kontinuierliche* Zweiseitenband-Modulation:

$$y_z(t) = v(t) \cos(\omega_T t) = v(t) \frac{1}{2} \left[e^{j\omega_T t} + e^{-j\omega_T t} \right],$$

$$Y_z(j\omega) = \frac{1}{2} \left[V(j(\omega - \omega_T)) + V(j(\omega + \omega_T)) \right].$$

□ *Diskrete* Zweiseitenband-Modulation:

$$y_z(n) = v(n) \cos(\Omega_T n) = v(n) \frac{1}{2} \left[e^{j\Omega_T n} + e^{-j\Omega_T n} \right],$$

$$Y_z(e^{j\Omega}) = \frac{1}{2} \left[V(e^{j(\Omega - \Omega_T)}) + V(e^{j(\Omega + \Omega_T)}) \right].$$

Lineare Modulationsverfahren

Zweiseitenband-Modulation (ZSB-Modulation) – Teil 2

Graphische Veranschaulichung:

Im Diagramm ist eine Kleinigkeit „unglücklich“/“falsch“ dargestellt ... welche?

Offenbar ist die vollständige Information über $v(\dots)$ bzw. $V(\dots)$ in den beiden äußeren Hälften des Spektrums (= obere Seitenbänder) und in den beiden inneren Hälften (= untere Seitenbänder) enthalten.

Nachteile der Zweiseitenband-Modulation:

Die Übertragung oder auch die Speicherung beider Seitenbänder würde **Redundanz** bedeuten. Dies ist nachteilig, insbesondere bei Frequenz-Multiplex-Übertragungen, da man hier möglichst viele Nutzer (z.B. Rundfunksender oder Telefon-Benutzer) über einen begrenzten Frequenzbereich übertragen will.

Will man die sog. **Frequenzeffizienz** erhöhen, so kann man z.B. eine Einseitenband-Modulation (dargestellt auf den nächsten Folien) verwenden.

Einseitenband-Modulation (ESB-Modulation) – Teil 1

Graphische Veranschaulichung:

Bei der Einseitenband-Modulation vermeidet man die Redundanz der Zweiseitenband-Modulation, in dem man nur die oberen oder die unteren Seitenbänder moduliert. Dabei bleiben die Symmetrien von reellwertigen Signalen erhalten.

Einseitenband-Modulation unter Verwendung der oberen Seitenbänder für kontinuierliche Signale!

Einseitenband-Modulation unter Verwendung der unteren Seitenbänder für diskrete Signale!

Lineare Modulationsverfahren

Einseitenband-Modulation (ESB-Modulation) – Teil 2

Prinzipielle Realisierung:

Die Einseitenband-Modulation kann durch eine **Zweiseitenband-Modulation** mit einer anschließenden **idealen Bandpassfilterung** realisiert werden.

Einseitenband-Modulation unter Verwendung der oberen Seitenbänder für kontinuierliche Signale!

Einseitenband-Modulation unter Verwendung der unteren Seitenbänder für diskrete Signale!

Lineare Modulationsverfahren

Amplituden-Modulation (AM) – Teil 1

„Zweiseiten-Modulation mit Träger“:

Eine Amplituden-Modulation kann als Zweiseiten-Modulation mit einer Trägerschwingung interpretiert werden. Sie wird für *kontinuierliche* Signale gemäß

$$y_a(t) = [1 + m v(t)] \cos(\omega_T t) = \cos(\omega_T t) + m \underbrace{v(t) \cos(\omega_T t)}_{= y_z(t)} = \cos(\omega_T t) + m y_z(t)$$

berechnet. Entsprechend gilt für *diskrete* Signale

$$y_a(n) = [1 + m v(n)] \cos(\Omega_T n) = \cos(\Omega_T n) + m \underbrace{v(n) \cos(\Omega_T n)}_{= y_z(n)} = \cos(\Omega_T n) + m y_z(n).$$

Graphische Darstellung:

*Periodische Fortsetzung
außerhalb des
Bereichs $[-\pi, \pi]$!*

Anmerkungen:

- Es ist zu beachten, dass bei dieser Modulationsart die **Trägerschwingung zusätzlich** auftritt, d.h. sie ist auch zu übertragen bzw. zu verarbeiten.
- Eine Amplituden-Modulation weist die **gleiche (schlechte) Bandbreiteneffizienz** wie eine Zweiseitenband-Modulation auf. Zusätzlich hat sie außerdem noch eine **schlechtere Energie-Effizienz**.
- Dennoch ist die Amplituden-Modulation ein **klassisches, weit verbreitetes Übertragungsverfahren** im Rundfunk (insbesondere im KW-, MW- und LW-Bereich).
- Der Grund dafür liegt in der **einfachen Demodulation** (es lassen sich billige Empfänger in großer Stückzahl herstellen). Dazu später mehr.

Zweiseitenband-Demodulation (ZSB-Demodulation) – Teil 1

Ansatz – Teil 1:

Für die Demodulation eines ZSB-modulierten Signals wird wieder mit einem Trägersignal multipliziert. Die Frequenz ist dabei die gleiche, die auch für den Träger verwendet wurde. Man spricht dann von einer **Synchron-Demodulation**:

□ **Kontinuierliche** Zweiseitenband-Demodulation:

$$\begin{aligned}
 y_z(t) \cos(\omega_T t) &= v(t) \cos^2(\omega_T t) \\
 &\quad \dots \text{cos-Theorem und Aufteilung in Exponentialterme einsetzen} \dots \\
 &= v(t) \frac{1}{2} [1 + \cos(2\omega_T t)] = v(t) \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} e^{j2\omega_T t} + \frac{1}{4} e^{-j2\omega_T t} \right], \\
 &\quad \circ \\
 &\quad \bullet \\
 &\quad \frac{1}{2} V(j\omega) + \frac{1}{4} V(j(\omega - 2\omega_T)) + \frac{1}{4} V(j(\omega + 2\omega_T)).
 \end{aligned}$$

Anschließend ist eine **Tiefpassfilterung** notwendig, welche die Signalkomponenten bei $\omega - 2\omega_T$ bzw. $\omega + 2\omega_T$ unterdrückt.

Zweiseitenband-Demodulation (ZSB-Demodulation) – Teil 2

Ansatz – Teil 2:

□ **Diskrete** Zweiseitenband-Demodulation:

$$\begin{aligned}
 y_z(n) \cos(\Omega_T n) &= v(n) \cos^2(\Omega_T n) \\
 &\quad \dots \text{cos-Theorem und Aufteilung in Exponentialterme einsetzen ...} \\
 &= v(n) \frac{1}{2} [1 + \cos(2\Omega_T n)] = v(n) \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} e^{j2\Omega_T n} + \frac{1}{4} e^{-j2\Omega_T n} \right], \\
 &\quad \circ \\
 &\quad \bullet \\
 &\quad \frac{1}{2} V(e^{j\Omega}) + \frac{1}{4} V(e^{j(\Omega-2\Omega_T)}) + \frac{1}{4} V(e^{j(\Omega+2\Omega_T)}).
 \end{aligned}$$

Anschließend ist eine **Tiefpassfilterung** notwendig, welche die Signalkomponenten bei $\Omega - 2\Omega_T$ bzw. $\Omega + 2\Omega_T$ unterdrückt.

Am Ausgang des Tiefpassfilters liegt dann (vorausgesetzt die (einseitige) Bandbreites des Signals $v(\dots)$ ist kleiner als die Trägerfrequenz) das gewichtetet Eingangssignal $1/2 v(\dots)$ vor!

Zweiseitenband-Demodulation (ZSB-Demodulation) – Teil 3

Ansatz – Teil 3:

Vervollständigen Sie die nebenstehenden Spektraldarstellungen!

Eigener Versuch, dann gemeinsame Lösung an der Tafel!

Schwierigkeiten bei der Demodulation – Teil 1:

Die Modulationen auf der Sende- und auf der Empfangsseite arbeiten (im Allgemeinen) mit Trägersignalen, die nicht gleichzeitig / am selben Ort erzeugt wurden. Nimmt man auf der Empfangsseite **Trägerfrequenzfehler** bzw. **Trägerphasenfehler** an, dann verwendet man für die kontinuierliche Demodulation das Modulationssignal

$$\cos((\omega_T + \Delta\omega)t + \varphi)$$

↙ Trägerfrequenzfehler
↖ Trägerphasenfehler

bzw. für diskrete Signale

$$\cos((\Omega_T + \Delta\Omega)n + \varphi)$$

↙ Trägerfrequenzfehler
↖ Trägerphasenfehler

Auf eine entsprechende Herleitung im Diskreten wird im Folgenden verzichtet, da diese völlig analog zu den kontinuierlichen Überlegungen verläuft.

Zweiseitenband-Demodulation (ZSB-Demodulation) – Teil 5

Schwierigkeiten bei der Demodulation – Teil 2:

Im Kontinuierlichen ergibt sich für eine Demodulation mit einem fehlerbehafteten Trägersignal:

$$\begin{aligned}y_z(t) \cos((\omega_T + \Delta\omega)t + \varphi) &= v(t) \cos(\omega_T t) \cos((\omega_T + \Delta\omega)t + \varphi) \\ &= v(t) \frac{1}{2} \left[\cos((2\omega_T + \Delta\omega)t + \varphi) + \cos(\Delta\omega t + \varphi) \right].\end{aligned}$$

Durch eine geeignete Tiefpassfilterung kann der Signalanteil rund um $2\omega_T + \Delta\omega$ entfernt werden.

Damit erhält man für das demodulierte, tiefpassgefilterte Signal:

$$v(t) \frac{1}{2} \cos(\Delta\omega t + \varphi).$$

Im Spektrum entspricht dies zwei verschobenen Teilspektren, die sich **nicht** zu $\frac{1}{2} V(j\omega)$ überlagern!

Dies führt zu starken **Verzerrungen**.

Schwierigkeiten bei der Demodulation – Teil 3:

Nimmt man an, dass es keine Trägerfrequenzfehler gäbe (dies ist mit einigem Aufwand verbunden), d.h. $\Delta\omega = 0$, so bleiben noch Phasenfehler übrig:

$$v(t) \frac{1}{2} \cos(\varphi).$$

Diese sind aber unkritisch, solange $\varphi \ll \pi/2$ bleibt. In diesem Fall gilt $\cos(\varphi) \approx 1$. Es ist daher keine perfekte, aber eine gute Phasensynchronisation notwendig.

ZSB-Demodulation mit Trägerfrequenzfehler – Teil 1:

🔊 Originalsignal

🔊 Demodulation mit 5 Hz
Frequenzversatz

ZSB-Demodulation mit Trägerfrequenzfehler – Teil 2:

🔊 Originalsignal

🔊 Demodulation mit 10 Hz
Frequenzversatz

Einseitenband-Demodulation (ESB-Demodulation) – Teil 1

Ansatz – Teil 1:

Die Demodulation eines einseitenband-modulierten Signals geschieht analog zur Demodulation eines zweiseitenband-modulierten Signals, d.h. mittels Multiplikation mit einem cosinus-Träger entsprechender Frequenz und anschließender Tiefpassfilterung:

$$y_e(t) \cos((\omega_T + \Delta\omega)t + \varphi).$$

Es werden Frequenz- und Phasenfehler angenommen!

Ist der Frequenzversatz klein und positiv, so sind **Frequenzfehler** bei der Einseitenband-Demodulation **unkritischer** als bei der Zweiseitenband-Demodulation.

Phasenfehler bewirken lediglich einen zusätzlichen Phasenterm im Ausgangsspektrum und sind i.A. vollkommen **unkritisch**.

ESB-Demodulation mit Trägerfrequenzfehler:

Originalsignal

Demodulation mit 5 Hz
Frequenzversatz

ESB-Demodulation mit Trägerfrequenzfehler:

🔊 Originalsignal

🔊 Demodulation mit 10 Hz
 Frequenzversatz

ESB-Demodulation mit Trägerfrequenzfehler:

Originalsignal

Demodulation mit 250 Hz
 Frequenzversatz

AM-Demodulation

Ansatz :

Grundsätzlich ist eine Amplituden-Modulation eine Zweiseitenband-Modulation mit Träger, d.h. man benötigt eine Synchron-Demodulation wie bei der Zweiseitenband-Demodulation. Allerdings kann hier ein viel einfacherer Ansatz angewendet werden:

- Man kann ein amplituden-moduliertes Signal zunächst **gleichrichten** $x(t) = |y_a(t)|$ und dann **tiefpassfiltern** (mit einem sehr einfachen Tiefpassfilter, zur Unterdrückung des Trägers [im einfachsten Fall: Diode und einfaches RC-Glied]).

Beispiel: $v(t) = \cos(\omega_v t)$ mit $\omega_v \ll \omega_T$.

Auf eine entsprechende Erläuterung im Diskreten wird verzichtet, da diese völlig analog zu den kontinuierlichen Überlegungen verläuft.

Ansatz – Teil 1:

Bei einer Amplituden-Modulation steckt die (Nutz-Signal-) Information in der momentanen Amplitude des Trägers.

Bei einer Puls-Amplituden-Modulation steckt die **Information** in den **Momentangewichten der Trägerimpulse**.

Als „Trägersignal“ wird hier eine Impulsfolge

$$p(t) = T_A \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_0(t - nT_A)$$

verwendet. Wie aus dem Transformationsteil der Vorlesung bekannt ist, gilt für das zugehörige Spektrum:

$$P(j\omega) = 2\pi \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \delta_0\left(\omega - \mu \frac{2\pi}{T_A}\right).$$

Zur Modulation wird das Nutzsinal $v_0(t)$ mit der Trägerimpulsfolge multipliziert:

$$y_p(t) = v_0(t) p(t) = T_A \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_0(t) \delta_0(t - nT_A)$$

... Ausblendeigenschaft der Impulsfunktion ...

$$= T_A \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_0(nT_A) \delta_0(t - nT_A).$$

Ansatz – Teil 2:

Bezeichnet man das abgetastete Signal $v_0(nT_A)$ als $v(n)$, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} y_p(t) &= T_A \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_0(nT_A) \delta_0(t - nT_A) \\ &= T_A \sum_{n=-\infty}^{\infty} v(n) \delta_0(t - nT_A), \end{aligned}$$

so ergibt sich der **erste Schritt einer Analog-Digital-Wandlung** (AD-Wandlung). $v(n)$ ist dabei als Folge von Abtastwerten, d.h. eine Zahlenfolge / diskretes Signal, zu verstehen.

Die Multiplikation mit der Trägerimpulsfolge $p(t)$ entspricht einer Faltung im Spektralbereich mit $P(j\omega)$, welche wiederum eine Impulsfolge ist, d.h. es gilt für das **Spektrum des puls-amplituden-modulierten Signals**:

$$Y_p(j\omega) = T_A \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} V_0 \left(j\left(\omega - \mu \frac{2\pi}{T_A}\right) \right).$$

Lineare Modulationsverfahren

Puls-Amplituden-Modulation – Teil 3

Ansatz – Teil 3:

Graphische Veranschaulichung:

Ansatz – Teil 4:

Offenbar bewirkt die Abtastung (mit der idealen Dirac-Impulsfolge) eine **periodische Wiederholung des Spektrums** mit der Periode

$$\omega_p = \frac{2\pi}{T_A} = 2\pi f_A = \omega_A,$$

also mit der Abtastfrequenz f_A .

Aufgrund der Periodizität kann auch ein **Zusammenhang mit der Fourier-Transformation der Folge** $v(n) \circ \bullet V(e^{j\Omega})$ hergestellt werden. Hierbei gilt

$$V(e^{j\Omega}) = Y_p(j\omega) \quad \text{mit} \quad \Omega = \omega T_A = \frac{\omega}{f_A} = \frac{2\pi f}{f_A}.$$

Abschließende Zusammenfassung

- Signale und Systeme – Einführung
- Signale
- Spektraldarstellungen determinierter Signale
- Lineare Systeme
- Modulation**
 - Grundlagen
 - Lineare Modulation
 - Zweiseitenband-Modulation
 - Einseitenband-Modulation
 - Amplituden-Modulation
 - Zweiseitenband-Demodulation
 - Einseitenband-Demodulation
 - Amplituden-Demodulation
 - Puls-Amplituden-Modulation und -Demodulation
 - Abtasttheorem