

Signale und Systeme – Spektraldarstellungen determinierter Signale (Teil 3)

Gerhard Schmidt

Christian-Albrechts-Universität zu Kiel

Technische Fakultät

Elektrotechnik und Informationstechnik

Digitale Signalverarbeitung und Systemtheorie



Gesamtübersicht – Teil 1

- ❑ Signale und Systeme – Einführung
 - ❑ Einführung und Begriffsklärung
 - ❑ Signale
 - ❑ Systeme

- ❑ Signale
 - ❑ Elementarsignale
 - ❑ Reaktion linearer Systeme auf Elementarsignale
 - ❑ Signalzerlegung in Elementarsignale

- ❑ Spektraldarstellungen determinierter Signale
 - ❑ Fourier-Reihe, Diskrete Fourier-Transformation
 - ❑ Fourier-Transformation
 - ❑ Laplace- und z-Transformation



Gesamtübersicht – Teil 2

□ Lineare Systeme

- Reaktionen auf Elementarsignale
- Reaktionen auf beliebige Signale
- Zusammenhänge zwischen Systemkenngößen
- Stabilität linearer Systeme
- Gebrochen-rationale Übertragungsfunktionen

□ Modulation

- Grundlagen
- Lineare Modulation- und Demodulationsverfahren
- Abtasttheorem

Übersicht des nächsten Abschnitts

- ❑ Signale und Systeme – Einführung
- ❑ Signale
- ❑ Spektraldarstellungen determinierter Signale
 - ❑ Fourier-Reihe und Diskrete Fourier-Transformation
 - ❑ Fourier-Transformation
 - ❑ **Laplace- und z-Transformation**
 - ❑ **Definition und Begriffsklärung**
 - ❑ **Eigenschaften und Sätze**
 - ❑ **Beispiele**
 - ❑ **Zusammenhänge und Querverbindungen**
- ❑ Lineare Systeme
- ❑ Modulation

Definitionen – Teil 1:

- Die **inverse Laplace-** (für kontinuierliche Signale) bzw. die **inverse z-Transformation** (für diskrete Signale) sind folgendermaßen definiert:

- Für kontinuierliche Signale:

$$v(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\substack{s = \sigma + j\omega, \\ \omega = -\infty \\ \omega = \infty}}^{\infty} V(s) e^{st} ds.$$

Inverse Laplace-Transformation

- Für diskrete Signale:

$$v(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\substack{\text{Geschl. Weg} \\ \text{um } 0}} V(z) z^n \frac{dz}{z}.$$

Inverse z-Transformation

„Unendlich dichte“ Überlagerung von allgemeinen Exponentialfunktionen.

- Bemerkungen:

- Die Signale $v(t)$ bzw. $v(n)$ sind im Allgemeinen **nicht periodisch**.
- Bei der inversen z-Transformation **integriert man auf einem geschlossenen Weg (Kreis) um den Nullpunkt** der komplexen z-Ebene herum (dieser ist eingeschlossen).

Definition und Begriffsklärung – Teil 2

Definitionen – Teil 2:

- Die zuvor genannten Integrale bei der inversen Laplace- bzw. z-Transformation **gehen über in die entsprechenden *Fourier-Integrale***, wenn man folgende Randbedingungen einführt:

$$s = \sigma + j\omega \Big|_{\sigma=0}, \quad \leftarrow \text{Integration auf der imaginären Achse!}$$

$$z = \rho e^{j\Omega} \Big|_{\rho=1}. \quad \leftarrow \text{Integration auf dem Einheitskreis!}$$

Man kann dies leicht einsehen, wenn man folgende **Substitutionen** vornimmt:

$$s = j\omega, \quad \frac{d}{d\omega} s = j, \quad \rightarrow ds = j d\omega,$$

$$z = e^{j\Omega}, \quad \frac{dz}{z} \Big|_{z=e^{j\Omega}} = \frac{de^{j\Omega}}{e^{j\Omega}} d\Omega \frac{1}{e^{j\Omega}} = j \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega}} d\Omega = j d\Omega.$$

Damit entstehen wieder die **ursprünglichen *Fourier-Integrale***.

Definition und Begriffsklärung – Teil 3

Definitionen – Teil 3:

- Die Umkehrung der inversen Transformationen, d.h. die Bestimmung der Spektren aus den Zeitsignalen, sind wie folgt definiert.

- Für kontinuierliche Signale:

$$V(s) = \int_{t=-\infty}^{\infty} v(t) e^{-st} dt.$$

Laplace-Transformation

- Für diskrete Signale:

$$V(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v(n) z^{-n}.$$

z-Transformation

- Hierfür haben sich wieder verschiedene abkürzende Schreibweisen etabliert. Wir werden hier folgende Notation verwenden.

- Für kontinuierliche Signale:

$$\begin{aligned} v(t) & \circ \text{---} \bullet V(s), \\ v(t) & = \mathcal{L}^{-1}\{V(s)\}, \\ V(s) & = \mathcal{L}\{v(t)\}. \end{aligned}$$

- Für diskrete Signale:

$$\begin{aligned} v(n) & \circ \text{---} \bullet V(z), \\ v(n) & = \mathcal{Z}^{-1}\{V(z)\}, \\ V(z) & = \mathcal{Z}\{v(n)\}. \end{aligned}$$

Begriffserklärung – Teil 1:

- Man kann die Laplace- bzw. z-Transformierte als Fourier-Transformation eines modifizierten Signals deuten.

Man kann dies zeigen, für ...

- ... kontinuierliche Signale:

$$\begin{aligned}
 V(s) &= \int_{t=-\infty}^{\infty} v(t) e^{-st} dt \\
 &\quad \dots \text{Einsetzen von } s = \sigma + j\omega \dots \\
 &= \int_{t=-\infty}^{\infty} v(t) e^{-(\sigma+j\omega)t} dt \\
 &\quad \dots \text{Terme neu zusammenfassen} \dots \\
 &= \int_{t=-\infty}^{\infty} [v(t) e^{-\sigma t}] e^{-j\omega t} dt \\
 &\quad \dots \text{Definition der Fourier-Transf. einsetzen} \dots \\
 &= \mathcal{F}\{v(t) e^{-\sigma t}\}.
 \end{aligned}$$

- ... diskrete Signale:

$$\begin{aligned}
 V(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} v(n) z^{-n} \\
 &\quad \dots \text{Einsetzen von } z = \rho e^{j\Omega} \dots \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} v(n) (\rho e^{j\Omega})^{-n} \\
 &\quad \dots \text{Terme neu zusammenfassen} \dots \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [v(n) \rho^{-n}] e^{-j\Omega n} \\
 &\quad \dots \text{Definition der Fourier-Transf. einsetzen} \dots \\
 &= \mathcal{F}\{v(n) \rho^{-n}\}.
 \end{aligned}$$

Begriffserklärung – Teil 2:

- Die „Signal-Modifikation“ kann dabei so verwendet werden, dass nach der Modifikation die Existenzbedingungen für die Fourier-Transformation erfüllbar sind, d.h. die absolute Integrierbarkeit bzw. Summierbarkeit von $v(\dots)$ wird damit folgendermaßen umgewandelt:

- ... kontinuierliche Signale:

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} |v(t) e^{-\sigma t}| dt \leq M < \infty.$$

- ... diskrete Signale:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |v(n) \rho^{-n}| \leq M < \infty.$$

- Bemerkungen:

- Unter Umständen ist eine Wahl des Wertes σ bzw. ρ so möglich, dass die o.g. **Existenzbedingungen erfüllt** werden, während die **ursprünglichen Existenzbedingungen der Fourier-Transformation nicht erfüllt** sind.
- Für jene s -Werte mit diesem Realteil $\sigma = \text{Re}\{s\}$ bzw. für jene z -Werte mit diesem Betrag $\rho = |z|$ lassen sich dann $v(t)$ bzw. $v(n)$ durch Spektralanteile, die mit der Laplace- bzw. der z-Transformation bestimmt wurden, ausdrücken.

Begriffserklärung – Teil 3:

□ Folgerungen:

- Es gibt Signale $v(\dots)$, für die keine Fourier-Transformierte angegeben werden kann, aber für geeignete Werte von s bzw. z dennoch Laplace- bzw. z-Transformierte.
- Nur wenn sich $V(s)$ bzw. $V(z)$ auch berechnen lässt für $\operatorname{Re}\{s\} = \sigma = 0$ bzw. für $|z| = \rho = 1$, wenn also die Fourier-Transformierte ebenfalls existiert, dann gilt ...

□ ... für kontinuierliche Signale:

$$\mathcal{L}\{v(t)\} \Big|_{s=j\omega} = V(s=j\omega) = V(j\omega) = \mathcal{F}\{v(t)\}.$$

□ ... für diskrete Signale:

$$\mathcal{Z}\{v(n)\} \Big|_{z=e^{j\Omega}} = V(z=e^{j\Omega}) = V(e^{j\Omega}) = \mathcal{F}\{v(n)\}.$$

Verständnisfragen

Partnerarbeit:

Versuchen Sie in Partnerarbeit folgende Fragen zu beantworten:

- Wie prüfen Sie, ob ein System oder eine Transformation linear ist?

.....
.....

- Erklären Sie den Unterschied zwischen einer Laplace- und einer Fourier-Transformation?
Kennen Sie Signale für welche die eine Transformation existiert und die andere nicht?

.....
.....

- Was bewirkt die Multiplikation einer Folge mit dem Term ρ^{-n} ?
Für welche Formen von Folgen, kann dies „kritisch“ sein?

.....
.....

Linearität und Modulation – Teil 1:

□ Linearität:

Sowohl die Laplace- als auch die z-Transformation beschreiben lineare Transformationen im Sinne der anfangs in dieser Vorlesungen vorgestellten Definition.

□ Modulation – Teil 1:

□ Für kontinuierliche Signale:

Gegeben:

$$V(s) = \mathcal{L}\{v(t)\},$$

$$v_1(t) = v(t) e^{s_0 t}.$$

Gesucht ist das zugehörige Spektrum:

$$V_1(s) = \int_{t=-\infty}^{\infty} v(t) e^{s_0 t} e^{-st} dt$$

$$= \int_{t=-\infty}^{\infty} v(t) e^{-(s-s_0)t} dt = V(s - s_0).$$

□ Für diskrete Signale:

Gegeben:

$$V(z) = \mathcal{Z}\{v(n)\},$$

$$v_1(n) = v(n) z_0^n.$$

Gesucht ist das zugehörige Spektrum:

$$V_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v(n) z_0^n z^{-n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} v(n) \left(\frac{z}{z_0}\right)^{-n} = V\left(\frac{z}{z_0}\right).$$

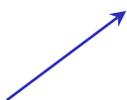
Linearität und Modulation – Teil 2:

□ Modulation – Teil 2:

Ergebnisse der letzten Folie:

□ Für kontinuierliche Signale:

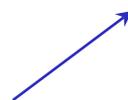
$$\mathcal{L}\{v(t) e^{s_0 t}\} = V(s - s_0).$$



Modulation im Zeitbereich entspricht einer Verschiebung im (Laplace-) Frequenzbereich (in Analogie zum Fourier-Spektrum)!

□ Für diskrete Signale:

$$\mathcal{Z}\{v(n) z_0^n\} = V\left(\frac{z}{z_0}\right).$$



Modulation im Zeitbereich entspricht nicht einer Verschiebung im (z-) Frequenzbereich! Setzt man allerdings $z = e^{j\Omega}$ sowie $z_0 = e^{j\Omega_0}$ so gilt:

$$\frac{z}{z_0} = \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega_0}} = e^{j(\Omega - \Omega_0)}.$$

Verschiebung – Teil 1:

□ Für kontinuierliche Signale

Gegeben:

$$\begin{aligned} V(s) &= \mathcal{L}\{v(t)\}, \\ v_1(t) &= v(t - t_0). \end{aligned}$$

Gesucht ist nun die zugehörige Laplace-Transformierte:

$$V_1(s) = \int_{t=-\infty}^{\infty} v(t - t_0) e^{-st} dt$$

... **Hinzunehmen von** $1 = e^{-st_0} e^{st_0}$...

$$= e^{-st_0} \int_{t=-\infty}^{\infty} v(t - t_0) e^{-s(t-t_0)} dt$$

... **Substituieren von** $x = t - t_0$ **und** $dt = dx$...

$$= e^{-st_0} \int_{x=-\infty}^{\infty} v(x) e^{-sx} dx = e^{-st_0} V(s).$$

□ Für diskrete Signale:

Gegeben:

$$\begin{aligned} V(z) &= \mathcal{Z}\{v(n)\}, \\ v_1(n) &= v(n - n_0). \end{aligned}$$

Gesucht ist nun die zugehörige z-Transformierte:

$$V_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v(n - n_0) z^{-n}$$

... **Hinzunehmen von** $1 = z^{-n_0} z^{n_0}$...

$$= z^{-n_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} v(n - n_0) z^{-(n-n_0)}$$

... **Substituieren von** $k = n - n_0$...

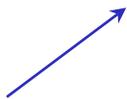
$$= z^{-n_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} v(k) z^{-k} = z^{-n_0} V(z).$$

Verschiebung – Teil 2:

□ Ergebnisse der letzten Folie:

□ Für kontinuierliche Signale:

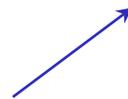
$$\mathcal{L}\{v(t - t_0)\} = e^{-st_0} V(s).$$



Verschiebung im Zeitbereich entspricht einer allgemeinen komplexen Modulation im Laplace-Spektrum. Setzt man $s = j\omega$, so geht der Verschiebungsoperator e^{-st_0} über in den linearen Phasenterm $e^{-j\omega t_0}$ der Fourier-Transformation.

□ Für diskrete Signale:

$$\mathcal{Z}\{v(n - n_0)\} = z^{-n_0} V(z).$$



Es entsteht eine ähnliche Beziehung wie in den vorigen Überlegungen. Setzt man $z = e^{j\Omega}$, so geht der Verschiebungsoperator z^{-n_0} über in den linearen Phasenterm $e^{-j\Omega n_0}$ der Fourier-Transformation.

Eigenschaften und Sätze – Teil 5

Symmetrien:

- Wegen der allgemeinen Komplexwertigkeit von s und z sind *keine Symmetrien* festzustellen, die den einfachen Zusammenhängen bei der Fourier-Transformation entsprechen.

Zur Erinnerung:

Für die Fourier-Transformation gilt:

$$\mathcal{F}\{V(jt)\} = 2\pi v(-\omega).$$

Dabei wurde die Fourier-Transformation auf ein Spektrum angewandt.

Faltungs- und Multiplikationssätze – Teil 1:

□ Analog zum **Faltungssatz** bei der Fourier-Transformation findet man ...

□ ... für kontinuierliche Signale:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{v_1(t) * v_2(t)\} &= V_1(s) V_2(s) \\ &= \mathcal{L}\{v_1(t)\} \mathcal{L}\{v_2(t)\}. \end{aligned}$$

□ ... für diskrete Signale:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{v_1(n) * v_2(n)\} &= V_1(z) V_2(z) \\ &= \mathcal{Z}\{v_1(n)\} \mathcal{Z}\{v_2(n)\}. \end{aligned}$$

Bei der Herleitung dieser Zusammenhänge geht man analog zu den Überlegungen bei der Fourier-Transformation vor!

□ Beim **Multiplikationssatz** ergeben sich – zumindest für diskrete Signale – Unterschiede. Für kontinuierliche Signale gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{v_1(t)v_2(t)\} &= \frac{1}{2\pi j} V_1(s) * V_2(s) \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\substack{x = \sigma + j\eta, \\ \eta = -\infty \\ \eta = \infty}}^{\infty} V_1(x) V_2(s - x) dx. \end{aligned}$$

Die Herleitung geht wieder analog zu den entsprechenden Überlegungen bei der Fourier-Transformation.

Faltungs- und Multiplikationssätze – Teil 2:

□ Für diskrete Signale ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Z}\{v_1(n) v_2(n)\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_1(n) v_2(n) z^{-n} \\
 &\quad \dots \text{Einsetzen der inversen z-Transformation } v_1(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_z V_1(z) z^n \frac{dz}{z} \dots \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi j} \oint_{\eta} V_1(\eta) \eta^n \frac{d\eta}{\eta} v_2(n) z^{-n} \\
 &\quad \dots \text{Vertauschen der Reihenfolge von Summation und Integration ...} \\
 &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\eta} V_1(\eta) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \eta^n v_2(n) z^{-n} \frac{d\eta}{\eta} \\
 &\quad \dots \text{Potenzen zusammenfassen ...} \\
 &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\eta} V_1(\eta) \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} v_2(n) \left(\frac{z}{\eta}\right)^{-n}}_{V_2(z/\eta)} \frac{d\eta}{\eta} \\
 &\quad \dots \text{Einsetzen der z-Transformationsgleichung ...} \\
 &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\eta} V_1(\eta) V_2\left(\frac{z}{\eta}\right) \frac{d\eta}{\eta}.
 \end{aligned}$$

Faltungs- und Multiplikationssätze – Teil 3:

□ Zusammengefasst ergibt sich für ...

□ ... kontinuierliche Signale:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{v_1(t)v_2(t)\} \\ = \frac{1}{2\pi j} \int_{\substack{x = \sigma + j\eta, \\ \eta = -\infty}}^{\infty} V_1(x) V_2(s - x) dx. \end{aligned}$$

□ ... diskrete Signale:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{v_1(n)v_2(n)\} \\ = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\eta} V_1(\eta) V_2\left(\frac{z}{\eta}\right) \frac{d\eta}{\eta}. \end{aligned}$$

Die Symmetrie zwischen den Faltungs- und den Multiplikationssätzen geht hier teilweise verloren!

Für $s = j\omega$ bzw. $z = e^{j\Omega}$ gehen allerdings beide Sätze wieder in die entsprechenden Fourier-Beziehungen über, d.h. die z-Bereichs-Lösung wird zu einer Faltung in Ω !

Parseval'sche Gleichung:

□ Mit Hilfe der Faltungssätze können folgende Beziehungen hergeleitet werden:

□ Für kontinuierliche Signale:

$$\begin{aligned}
 w_v(\infty) &= \int_{t=-\infty}^{\infty} |v(t)|^2 dt \\
 &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\substack{s = \sigma + j\omega, \\ \omega = -\infty}}^{\infty} V(s) V^*(-s^*) ds.
 \end{aligned}$$

□ Für diskrete Signale:

$$\begin{aligned}
 w_v(\infty) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |v(n)|^2 \\
 &= \frac{1}{2\pi j} \oint_z V(z) V^*\left(\frac{1}{z^*}\right) \frac{dz}{z}.
 \end{aligned}$$

Hierbei ist zu beachten, dass dies keine Integrale über $|V(\dots)|^2$ sind! Für $s = j\omega$ bzw. $z = e^{j\Omega}$ gehen sie aber in solche über, eben gerade jene, die für die Fourier-Transformation hergeleitet wurden.

Differentiation und Differenzbildung:

- Für kontinuierliche Signale:

Gegeben:

$$V(s) = \mathcal{L}\{v(t)\}.$$

Hierzu wird die **Ableitung** gemäß

$$v_1(t) = \dot{v}(t) = \frac{d}{dt}v(t)$$

definiert.

Stellt man hier die **gleichen Überlegungen wie im entsprechenden Abschnitt der Fourier-Transformation** an, so erhält man für ...

- ...kontinuierliche Signale:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}v(t)\right\} = sV(s).$$

- Für diskrete Signale:

Gegeben:

$$V(z) = \mathcal{Z}\{v(n)\}.$$

Hierzu wird eine **Signaldifferenz** gemäß

$$v_1(n) = \Delta v(n) = v(n) - v(n - 1)$$

definiert.

- ... diskrete Signale:

$$\mathcal{Z}\{v(n) - v(n - 1)\} = V(z) [1 - z^{-1}].$$

Es gilt wieder, dass die o.g. Beziehungen für $s = j\omega$ bzw. $z = e^{j\Omega}$ in die entsprechenden Beziehungen der Fourier-Transformation übergehen.

Differentiation im Spektrum – Teil 1:

□ Für kontinuierliche Signale:

Gegeben:

$$V(s) = \mathcal{L}\{v(t)\}.$$

Hierzu wird die spektrale Ableitung gemäß

$$V_1(s) = \frac{d}{ds} V(s)$$

definiert. **Gesucht** ist nun die zugehörige inverse Laplace-Transformation (in Abhängigkeit von $v(t)$):

$$\begin{aligned} V_1(s) &= \frac{d}{ds} \int_{t=-\infty}^{\infty} v(t) e^{-st} dt \\ &= \int_{t=-\infty}^{\infty} [v(t) (-t)] e^{-st} dt \\ &= \mathcal{L}\{v(t) (-t)\}. \end{aligned}$$

□ Für diskrete Signale:

Gegeben:

$$V(z) = \mathcal{Z}\{v(n)\}.$$

Hierzu wird eine spektrale Ableitung gemäß

$$V_1(z) = z \frac{d}{dz} V(z)$$

definiert. **Gesucht** ist nun die zugehörige inverse z-Transformation (in Abhängigkeit von $v(n)$):

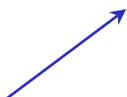
$$\begin{aligned} V_1(z) &= z \frac{d}{dz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} v(n) z^{-n} \\ &= z \sum_{n=-\infty}^{\infty} [v(n) (-n)] z^{-n-1} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [v(n) (-n)] z^{-n} = \mathcal{Z}\{v(n) (-n)\}. \end{aligned}$$

Differentiation im Spektrum – Teil 2:

□ Ergebnisse der letzten Folie:

□ Für kontinuierliche Signale:

$$\frac{d}{ds} V(s) = \mathcal{L}\{v(t)(-t)\}.$$



Dieses Ergebnis ist wiederum konform mit den entsprechenden Fourier-Überlegungen. Für $s = j\omega$ geht das Ergebnis in das Fourier-Ergebnis über.

□ Für diskrete Signale:

$$z \frac{d}{dz} V(z) = \mathcal{Z}\{v(n)(-n)\}.$$



Im Unterschied zu den Überlegungen im Fourier-Spektrum ist hier die zusätzlich Multiplikation mit der Frequenzvariablen notwendig. Das Ergebnis geht aber für $z = e^{j\Omega}$ in das Fourier-Ergebnis über. Hierbei ist der Zusammenhang

$$\left. \frac{dz}{d\Omega} \right|_{z=e^{j\Omega}} = \frac{d}{d\Omega} e^{j\Omega} = j e^{j\Omega} = jz \implies \frac{dz}{z} = j d\Omega$$

zu beachten – dies ist auch der Grund für die zusätzliche Multiplikation mit z .

Integration und Summation – Teil 1:

□ Mit den Definitionen für ...

□ ... die Integration kontinuierlicher Signale:

$$v_1(t) = \int_{\tau=-\infty}^t v(\tau) d\tau$$

□ ... die Summation diskreter Signale:

$$v_1(n) = \sum_{\kappa=-\infty}^n v(\kappa)$$

ergibt sich aus einer völlig analogen Herleitung wie bei der Fourier-Transformation für ...

□ ... kontinuierliche Signale:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{v(t)\} &= V(s), \\ \mathcal{L}\left\{\int_{\tau=-\infty}^t v(\tau) d\tau\right\} &= \frac{1}{s} V(s). \end{aligned}$$

□ ... diskrete Signale:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{v(n)\} &= V(z), \\ \mathcal{Z}\left\{\sum_{\kappa=-\infty}^n v(\kappa)\right\} &= \frac{V(z)}{1 - z^{-1}}. \end{aligned}$$

Diese Ergebnisse stellen die Umkehrung der Spektralbeziehungen für die Differentiation bzw. Differenzenbildung dar!

Eigenschaften und Sätze – Teil 14

Integration und Summation – Teil 2:

- Bei den entsprechenden Beziehungen für die Fourier-Transformation wurde gefordert, dass die Spektralwerte $V(\dots)$ an den Stützstellen $s = j\omega = 0$ bzw. $z = e^{j\Omega} = 1$ Null sein müssen. Dies hatte zur Folge, dass $v_1(t)$ bzw. $v_1(n)$ für $t \rightarrow \infty$ bzw. $n \rightarrow \infty$ abklingen müssen. Da hier aber gerade nicht Fourier-transformierbare Signale erfasst werden sollen, muss dies für die Laplace- bzw. z-Transformation nicht so sein.

Das heißt, $V_1(s)|_{s=0}$ und $V_1(z)|_{z=1}$ dürfen „singulär“ sein (und einen „Pol“ bei $s = 0$ bzw. $z = 1$ aufweisen)!

Verständnisfragen

Partnerarbeit:

Versuchen Sie in Partnerarbeit folgende Fragen zu beantworten:

- Gegeben sei ein sog. rechtsseitiges Signal, d.h. es gilt $v(t) = 0, \forall t < 0$. Für dieses Signal existiere die Fourier-Transformation. Für welche Werte von σ existiert dann auf jeden Fall auch eine Laplace-Transformation?

.....
.....
.....

- Was bewirkt eine Modulation einer Impulsantwort mit $e^{s_0 t}$ im Zeitbereich? Kann dies Auswirkungen haben auf die Stabilität eines Systems? Warum und wenn ja, welche?

.....
.....
.....

Beispiele – Teil 1

Impulse – Teil 1:

□ Für kontinuierliche Signale:

Gegeben:

$$v(t) = \delta_0(t).$$

Hierzu wird die **Laplace-Transformierte** und der **Konvergenzbereich** gesucht:

$$\Delta_0(s) = \int_{t=-\infty}^{\infty} \delta_0(t) e^{-st} dt$$

... Ausblendeigenschaft des Dirac-Impulses ...

$$= \int_{t=-\infty}^{\infty} \delta_0(t) \underbrace{e^0}_{=1} dt$$

... Flächeneigenschaft des Dirac-Impulses ...

$$= \int_{t=-\infty}^{\infty} \delta_0(t) dt \equiv 1 \quad \forall s.$$

□ Für diskrete Signale:

Gegeben:

$$v(n) = \gamma_0(n).$$

Hierzu wird die **z-Transformierte** und der **Konvergenzbereich** gesucht:

$$\Gamma_0(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_0(n) z^{-n}$$

... Ausblendeigenschaft des Impulses ...

$$= z^0 \equiv 1 \quad \forall z.$$

Impulse – Teil 2:

- Wie auch bei den bisher behandelten Transformationen liefern die Laplace- und die z-Transformation ein konstantes Spektrum über der Frequenz, d.h. ein sog. „weißes“ Signal.
- Verallgemeinerung für **Impulse in allgemeiner Lage**:

□ Für kontinuierliche Signale:

Gegeben:

$$v(t) = \delta_0(t - t_0).$$

Zugehörige **Laplace-Transformierte**
 und **Konvergenzgebiet**:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\delta_0(t - t_0)\} &= e^{-st_0} \mathcal{L}\{\delta_0(t)\} \\ &\dots \text{Verschiebe-Operator...} \\ &= e^{-st_0}. \end{aligned}$$

□ Für diskrete Signale:

Gegeben:

$$v(n) = \gamma_0(n - n_0).$$

Zugehörige **z-Transformierte**
 und **Konvergenzgebiet**:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{\gamma_0(n - n_0)\} &= z^{-n_0} \mathcal{Z}\{\gamma_0(n)\} \\ &\dots \text{Verschiebe-Operator...} \\ &= z^{-n_0}. \end{aligned}$$

Sprünge – Teil 1:

□ Für kontinuierliche Signale:

Gegeben:

$$v(t) = \delta_{-1}(t).$$

Zugehörige **Laplace-Transformierte**
und **Konvergenzbereich:**

$$\Delta_{-1}(s) = \int_{t=-\infty}^{\infty} \delta_{-1}(t) e^{-st} dt$$

... **Einsetzen der Sprungfunktion ...**

$$= \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} dt$$

... **Stammfunktion bestimmen ...**

$$= \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^{\infty}$$

... **Grenzen einsetzen ...**

$$= \frac{1}{s} - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{s} e^{-st}$$

□ Für diskrete Signale:

Gegeben:

$$v(n) = \gamma_{-1}(n).$$

Zugehörige **z-Transformierte**
und **Konvergenzbereich:**

$$\Gamma_{-1}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_{-1}(n) z^{-n}$$

... **Einsetzen der Sprungfunktion ...**

$$= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}$$

... **Grenzübergang einer endl. geom. Reihe ...**

$$= \frac{1 - z^{-(N+1)}}{1 - z^{-1}} \Big|_{N \rightarrow \infty}$$

Sprünge – Teil 2:

□ Für kontinuierliche Signale:

... Ergebnis der letzten Folie ...

$$\Delta_{-1}(s) = \frac{1}{s} - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{s} e^{-st}$$

... für den Grenzwert gilt ...

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st}$$

... Einsetzen von $s = \sigma + j\omega$...

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[e^{-\sigma t} \underbrace{e^{-j\omega t}}_{|\dots|=1} \right]$$

... Grenzwertbildung ...

$$= 0, \quad \text{für } \sigma > 0.$$

... zusammengefasst gilt damit ...

$$\Delta_{-1}(s) = \mathcal{L}\{\delta_{-1}(t)\} = \frac{1}{s} \quad \text{für } \operatorname{Re}\{s\} > 0.$$

□ Für diskrete Signale:

... Ergebnis der letzten Folie ...

$$\Gamma_{-1}(z) = \frac{1 - z^{-(N+1)}}{1 - z^{-1}} \Bigg|_{N \rightarrow \infty}$$

... für den Grenzwert gilt ...

$$\lim_{N \rightarrow \infty} z^{-(N+1)}$$

... Einsetzen von $z = \rho e^{j\Omega}$...

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\rho^{-(N+1)} \underbrace{e^{-j\Omega(N+1)}}_{|\dots|=1} \right]$$

... Grenzwertbildung ...

$$= 0, \quad \text{für } \rho > 1.$$

... zusammengefasst gilt damit ...

$$\Gamma_{-1}(z) = \mathcal{Z}\{\gamma_{-1}(n)\} = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad \text{für } |z| > 1.$$

Geschaltete Exponentielle:

□ Für kontinuierliche Signale:

Gegeben:

$$v(t) = e^{s_\infty t} \delta_{-1}(t).$$

Zugehörige **Laplace-Transformierte**
und **Konvergenzbereich:**

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{s_\infty t} \delta_{-1}(t)\} & \stackrel{\text{... Modulationssatz ...}}{=} \mathcal{L}\{\delta_{-1}(t)\} \Big|_{s:=s-s_\infty} \\ & \stackrel{\text{... Einsetzen ...}}{=} \frac{1}{s - s_\infty} \\ & \text{für } \operatorname{Re}\{s\} > \operatorname{Re}\{s_\infty\} \end{aligned}$$

Diese Transformationspaare werden im Verlauf der Vorlesung eine wichtige Rolle spielen. Sie gelten auch für geschaltete harmonische Exponentialfunktionen!

□ Für diskrete Signale:

Gegeben:

$$v(n) = z_\infty^n \gamma_{-1}(n).$$

Zugehörige **z-Transformierte**
und **Konvergenzbereich:**

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{z_\infty^n \gamma_{-1}(n)\} & \stackrel{\text{... Modulationssatz ...}}{=} \mathcal{Z}\{\gamma_{-1}(n)\} \Big|_{z:=\frac{z}{z_\infty}} \\ & \stackrel{\text{... Einsetzen ...}}{=} \frac{1}{1 - \frac{z_\infty}{z}} \\ & \stackrel{\text{... Multiplikation mit } z/z \text{ ...}}{=} \frac{z}{z - z_\infty} \\ & \text{für } |z| > |z_\infty| \end{aligned}$$

Geschaltete periodische Signale – Teil 1:

□ Für kontinuierliche Signale:

Gegeben:

$$v_p(t) = v_p(t + \lambda T) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} c_{\mu} e^{j\mu \frac{2\pi}{T} t}.$$

Aufgrund der Periodizität kann das Signal als **Fourier-Reihe** dargestellt werden. Daraus wird durch **Multiplikation mit einer Sprungfunktion** ein geschaltetes periodisches Signal erzeugt:

$$v(t) = v_p(t) \delta_{-1}(t).$$

Gesucht ist nun die Laplace-Transformierte dieses Signals.

□ Für diskrete Signale:

Gegeben:

$$v_p(n) = v_p(n + \lambda M) = \frac{1}{M} \sum_{\mu=0}^{M-1} V_M(\mu) e^{j\mu \frac{2\pi}{M} n}.$$

Aufgrund der Periodizität kann das Signal als **inverse diskrete Fourier-Transformation** dargestellt werden. Daraus wird durch **Multiplikation mit einer Sprungfunktion** ein geschaltetes periodisches Signal erzeugt:

$$v(n) = v_p(n) \gamma_{-1}(n).$$

Gesucht ist nun die z-Transformierte dieses Signals.

Geschaltete periodische Signale – Teil 2:

□ Für kontinuierliche Signale ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{v(t)\} &= \mathcal{L}\{v_p(t) \delta_{-1}(t)\} \\ &\dots \text{Einsetzen der Fourier-Reihe ...} \\ &= \mathcal{L}\left\{ \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} c_{\mu} e^{j\mu \frac{2\pi}{T} t} \delta_{-1}(t) \right\} \\ &\dots \text{Reihenfolge von Transform. und Summe ...} \\ &= \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} c_{\mu} \mathcal{L}\{e^{j\mu \frac{2\pi}{T} t} \delta_{-1}(t)\} \\ &\dots \text{Modulationsatz ...} \\ &= \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} c_{\mu} \mathcal{L}\{\delta_{-1}(t)\} \Big|_{s:=s-j\mu \frac{2\pi}{T}} \\ &\dots \text{Transformationsergebnis einsetzen ...} \\ &= \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \frac{c_{\mu}}{s - j\mu \frac{2\pi}{T}} \end{aligned}$$

für $\text{Re}\{s\} > 0$.

□ Für diskrete Signale ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{v(n)\} &= \mathcal{Z}\{v_p(n) \gamma_{-1}(n)\} \\ &\dots \text{Einsetzen der inversen DFT ...} \\ &= \mathcal{Z}\left\{ \frac{1}{M} \sum_{\mu=0}^{M-1} V_M(\mu) e^{j\mu \frac{2\pi}{M} n} \gamma_{-1}(n) \right\} \\ &\dots \text{Reihenfolge von Transform. und Summe ...} \\ &= \frac{1}{M} \sum_{\mu=0}^{M-1} V_M(\mu) \mathcal{Z}\{e^{j\mu \frac{2\pi}{M} n} \gamma_{-1}(n)\} \\ &\dots \text{Modulationsatz ...} \\ &= \frac{1}{M} \sum_{\mu=0}^{M-1} V_M(\mu) \mathcal{Z}\{\gamma_{-1}(n)\} \Big|_{z:=\frac{z}{e^{j\mu \frac{2\pi}{M}}}} \\ &\dots \text{Transformationsergebnis einsetzen ...} \\ &= \frac{1}{M} \sum_{\mu=0}^{M-1} V_M(\mu) \frac{z}{z - e^{j\mu \frac{2\pi}{M}}} \end{aligned}$$

für $|z| > 1$.

Beispiele – Teil 8

Geschaltete periodische Signale – Teil 3:

□ Beobachtungen:

- Die Transformation geschalteter Exponentialfunktionen der „Frequenz-Variablen“ s_∞ bzw. z_∞ weisen Nenner-Terme mit Nenner-Nullstellen, also Polen von $V(\dots)$ auf in $s = s_\infty$ bzw. in $z = z_\infty$.
- Das gilt auch im einfachen Fall $s_\infty = 0$ bzw. $z_\infty = 1$, also beim Sprung.
- Geschaltete periodische Signale weisen Pole auf in $s_{\infty,\mu} = j\mu \frac{2\pi}{T}$ bzw. $z_{\infty,\mu} = e^{j\mu \frac{2\pi}{M}}$.

Modulierte Rampe – Teil 1:

□ Für kontinuierliche Signale:

Gegeben:

$$v(t) = e^{s_\infty t} \delta_{-2}(t).$$

Dies kann man folgendermaßen auf die **Sprungfunktion** zurückführen:

$$v(t) = e^{s_\infty t} t \delta_{-1}(t).$$

Gesucht ist die zugehörige Laplace-Transformierte und der Konvergenzbereich:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{v(t)\} &= \mathcal{L}\{e^{s_\infty t} t \delta_{-1}(t)\} \\ &\dots \text{Multiplikation mit } t \text{ bzw. } n \text{ entspricht modifizierter Ableitung im Spektrum...} \\ &= -\frac{d}{ds} \left[\mathcal{L}\{e^{s_\infty t} \delta_{-1}(t)\} \right] \\ &\dots \text{Einsetzen bisheriger Ergebnisse ...} \\ &= -\frac{d}{ds} \left[\frac{1}{s - s_\infty} \right] \end{aligned}$$

□ Für diskrete Signale:

Gegeben:

$$v(n) = z_\infty^n \gamma_{-2}(n).$$

Dies kann man folgendermaßen auf die **Sprungfunktion** zurückführen:

$$v(n) = z_\infty^n n \gamma_{-1}(n).$$

Gesucht ist die zugehörige z-Transformierte und der Konvergenzbereich:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{v(n)\} &= \mathcal{Z}\{z_\infty^n n \gamma_{-1}(n)\} \\ &= -z \frac{d}{dz} \left[\mathcal{Z}\{z_\infty^n \gamma_{-1}(n)\} \right] \\ &\dots \text{Einsetzen bisheriger Ergebnisse ...} \\ &= -z \frac{d}{dz} \left[\frac{z}{z - z_\infty} \right] \end{aligned}$$

Modulierte Rampe – Teil 2:

□ Für kontinuierliche Signale:

... Fortsetzung

$$\mathcal{L}\{v(t)\} = -\frac{d}{ds} \left[\frac{1}{s - s_\infty} \right]$$

... **Quotientenregel** $\left[\frac{u}{v} \right]' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$...

$$= \frac{1}{(s - s_\infty)^2}$$

für $\text{Re}\{s\} > \text{Re}\{s_\infty\}$.

□ Für diskrete Signale:

... Fortsetzung ...

$$\mathcal{Z}\{v(n)\} = -z \frac{d}{dz} \left[\frac{z}{z - z_\infty} \right]$$

... **Quotientenregel** $\left[\frac{u}{v} \right]' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$...

$$= \frac{z z_\infty}{(z - z_\infty)^2}$$

für $|z| > |z_\infty|$.

□ Anmerkungen:

□ Offenbar führt jeder weitere Faktor t bzw. n beim Signal zu

□ einem immer glatteren Verlauf bei $t = 0$ bzw. $n = 0$,

□ einem immer höheren Grad des Nennerterms $(s - s_\infty)$ bzw. $(z - z_\infty)$,

□ einer immer größeren Graddifferenz des Zähler- und des Nennerterms, weil der Zählergrad gleich bleibt (zumindest bei der Laplace-Transformation)

Gebrochen-rationale Funktionen – Teil 1:

- Die bisher genannten Signal-Transformations-Paare sind Sonderfälle einer allgemeineren Transformationsklasse, die in Anwendungen sehr häufig auftritt:

- Für kontinuierliche Signale:

$$V(s) = \frac{\sum_{\mu=0}^m \alpha_{\mu} s^{\mu}}{\sum_{\nu=0}^k \beta_{\nu} s^{\nu}}.$$

- Für diskrete Signale:

$$V(z) = \frac{\sum_{\mu=0}^m \alpha_{\mu} z^{\mu}}{\sum_{\nu=0}^k \beta_{\nu} z^{\nu}}.$$

- Den **Quotienten zweier Polynome** bezeichnet man als **(gebrochen) rationale Funktionen**.
- Rationale Funktionen lassen sich in Partialbrüche zerlegen.

Basis:

Jedes Polynom N-ten Grades hat N Nullstellen. Dies gilt natürlich auch für Nenner-Polynome.

Nenner-Nullstellen bedeuten aber „Unendlichkeitsstellen“ des Quotienten, das sind sog. „Pole“ von $V(s)$ bzw. $V(z)$.

Gebrochen-rationale Funktionen – Teil 2:

- Partialbruchdarstellungen für den Fall $m = k$ (**Grad des Nennerpolynoms = Grad des Zählerpolynoms**) und

- für kontinuierliche Signale mit

$$s_{\infty,\mu} \neq s_{\infty,\lambda} \quad \forall \mu \neq \lambda,$$

d.h. **alle Polstellen sind unterschiedlich** und kommen jeweils nur einmal vor.

- für diskrete Signale mit

$$z_{\infty,\mu} \neq z_{\infty,\lambda} \quad \forall \mu \neq \lambda,$$

d.h. **alle Polstellen sind unterschiedlich** und kommen jeweils nur einmal vor.

Unter diesen Randbedingungen ist folgende Umformung möglich:

- für kontinuierliche Signale

$$V(s) = B_0 + \sum_{\nu=1}^k \frac{B_{\nu}}{s - s_{\infty,\nu}}.$$

- für diskrete Signale:

$$V(z) = B_0 + \sum_{\nu=1}^k \frac{B_{\nu}}{z - z_{\infty,\nu}}.$$

Gebrochen-rationale Funktionen – Teil 3:

□ Wegen der Linearität der Laplace- und der z-Transformation sind mit den vorherigen Beispielen die **Rücktransformationen** einfach möglich.

□ Für kontinuierliche Signale gilt

$$V(s) = B_0 + \sum_{\nu=1}^k \frac{B_\nu}{s - s_{\infty,\nu}}$$


$$v(t) = B_0 \delta_0(t) + \sum_{\nu=1}^k B_\nu e^{s_{\infty,\nu} t} \delta_{-1}(t)$$

$$\text{für } \operatorname{Re}\{s\} > \max \left\{ \operatorname{Re}\{s_{\infty,\nu}\} \right\}.$$

□ Für diskrete Signale gilt

$$V(z) = B_0 + \sum_{\nu=1}^k \frac{B_\nu}{z - z_{\infty,\nu}}$$


$$v(n) = B_0 \gamma_0(n) + \sum_{\nu=1}^k B_\nu z_{\infty,\nu}^{n-1} \gamma_{-1}(n-1)$$

$$\text{für } |z| > \max \left\{ |z_{\infty,\nu}| \right\}.$$

Beispiele – Teil 14

Gebrochen-rationale Funktionen – Teil 4:

- Partialbruchdarstellungen für den Fall $m = k$ (Grad des Nennerpolynoms = Grad des Zählerpolynoms) und **für mehrfache Pole**, d.h.

- für kontinuierliche Signale mit

$$(s - s_{\infty, \nu})^{k_{\nu}}$$

- für diskrete Signale mit

$$(z - z_{\infty, \nu})^{k_{\nu}}$$

wobei k_{ν} die **Vielfachheit des Poles** angibt.

Wenn zumindest ein Pol mehrfach vorhanden ist, gibt es offenbar weniger als k verschiedene Pole $s_{\infty, \nu}$ bzw. $z_{\infty, \nu}$, da deren Gesamtzahl ja unverändert ($= k$) bleibt. Mit der Anzahl k_0 unterschiedlicher Pole gilt aber immer:

$$\sum_{\nu=1}^{k_0} k_{\nu} = k.$$

Gebrochen-rationale Funktionen – Teil 5:

- Wendet man eine allgemeine **Partialbruchzerlegung** an, die auch Mehrfachpolstellen berücksichtigt, so gelangt man zu folgender Form ...

- ... für kontinuierliche Signale:

$$V(s) = B_0 + \sum_{\nu=1}^{k_0} \sum_{\kappa=1}^{k_\nu} \frac{B_{\nu,\kappa}}{(s - s_{\infty,\nu})^\kappa}$$



Bei der Partialbruchzerlegung tauchen dabei nicht nur jene Terme mit der maximalen Vielfachheit, sondern auch alle anderen (mit geringerer Vielfachheit) auf!

$$v(t) = B_0 \delta_0(t) + \sum_{\nu=1}^{k_0} \sum_{\kappa=1}^{k_\nu} B_{\nu,\kappa} e^{s_{\infty,\nu} t} \delta_{-\kappa}(t)$$

$$= B_0 \delta_0(t) + \sum_{\nu=1}^{k_0} \sum_{\kappa=1}^{k_\nu} B_{\nu,\kappa} e^{s_{\infty,\nu} t} \frac{t^{\kappa-1}}{(\kappa-1)!} \delta_{-1}(t)$$

Man beachte hierzu die beiliegenden Transformationstabellen!

$$\text{für } \operatorname{Re}\{s\} > \max \left\{ \operatorname{Re}\{s_{\infty,\nu}\} \right\}.$$

Gebrochen-rationale Funktionen – Teil 6:

□ ... für diskrete Signale:

$$V(z) = B_0 + \sum_{\nu=1}^{k_0} \sum_{\kappa=1}^{k_\nu} B_{\nu,\kappa} \frac{z}{(z - z_{\infty,\nu})^\kappa}$$



$$v(n) = B_0 \gamma_0(n) + \sum_{\nu=1}^{k_0} \sum_{\kappa=1}^{k_\nu} B_{\nu,\kappa} z_{\infty,\nu}^{n-\kappa+1} \binom{n}{\kappa-1} \gamma_{-1}(n-\kappa+1)$$

$$\text{für } |z| > \max \{ |z_{\infty,\nu}| \}.$$

Man beachte hierzu wieder die beiliegenden Transformationstabellen!

Gebrochen-rationale Funktionen – Teil 7:

□ Berechnung der Partialbruchkoeffizienten B_ν bzw. $B_{\nu,\kappa}$:

□ **Absolut-Glieder** B_0 für *kontinuierliche* Signale:

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \infty} [V(s)] &= \lim_{s \rightarrow \infty} \left[B_0 + \sum_{\nu=1}^{k_0} \sum_{\kappa=1}^{k_\nu} \frac{B_{\nu,\kappa}}{(s - s_{\infty,\nu})^\kappa} \right] \\ &= B_0 \end{aligned}$$

Setzt man noch die ursprüngliche Form des Spektrums

$$V(s) = \frac{\sum_{\mu=0}^k \alpha_\mu s^\mu}{\sum_{\nu=0}^k \beta_\nu s^\nu}$$

ein, so ergibt sich

$$\lim_{s \rightarrow \infty} [V(s)] = B_0 = \frac{\alpha_k}{\beta_k}.$$

Gebrochen-rationale Funktionen – Teil 8:

□ Berechnung der Partialbruchkoeffizienten B_ν bzw. $B_{\nu,\kappa}$:

□ **Absolut-Glieder** B_0 für **diskrete** Signale:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} [V(z)] &= \lim_{z \rightarrow 0} \left[B_0 + \sum_{\nu=1}^{k_0} \sum_{\kappa=1}^{k_\nu} B_{\nu,\kappa} \frac{z}{(z - z_{\infty,\nu})^\kappa} \right] \\ &= B_0 \end{aligned}$$

Setzt man noch die ursprüngliche Form des Spektrums

$$V(z) = \frac{\sum_{\mu=0}^k \alpha_\mu z^\mu}{\sum_{\nu=0}^k \beta_\nu z^\nu}$$

ein, so ergibt sich

$$\lim_{z \rightarrow 0} [V(z)] = B_0 = \frac{\alpha_0}{\beta_0}.$$

Gebrochen-rationale Funktionen – Teil 9:

□ Berechnung der Partialbruchkoeffizienten B_ν bzw. $B_{\nu,\kappa}$:

□ Koeffizienten B_ν mit $\nu \neq 0$ bei **einfachen Polen** für **kontinuierliche** Signale:

$$\begin{aligned}
 & \lim_{s \rightarrow s_{\infty,\nu}} \left[V(s) (s - s_{\infty,\nu}) \right] \\
 &= \lim_{s \rightarrow s_{\infty,\nu}} \left[(s - s_{\infty,\nu}) \left(B_0 + \frac{B_\nu}{s - s_{\infty,\nu}} + \sum_{\mu=1, \mu \neq \nu}^{k_0} \sum_{\kappa=1}^{k_\mu} \frac{B_{\mu,\kappa}}{(s - s_{\infty,\mu})^\kappa} \right) \right] \\
 &= \lim_{s \rightarrow s_{\infty,\nu}} \left[B_0 (s - s_{\infty,\nu}) + B_\nu + \sum_{\mu=1, \mu \neq \nu}^{k_0} \sum_{\kappa=1}^{k_\mu} \frac{B_{\mu,\kappa} (s - s_{\infty,\nu})}{(s - s_{\infty,\mu})^\kappa} \right] \\
 &= B_\nu
 \end{aligned}$$

Gebrochen-rationale Funktionen – Teil 10:

□ Berechnung der Partialbruchkoeffizienten B_ν bzw. $B_{\nu,\kappa}$:

□ Koeffizienten B_ν mit $\nu \neq 0$ bei **einfachen Polen** für **diskrete** Signale:

$$\begin{aligned} & \lim_{z \rightarrow z_{\infty,\nu}} \left[V(z) \frac{z - z_{\infty,\nu}}{z} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow z_{\infty,\nu}} \left[\frac{z - z_{\infty,\nu}}{z} \left(B_0 + B_\nu \frac{z}{z - z_{\infty,\nu}} + \sum_{\mu=1, \mu \neq \nu}^{k_0} \sum_{\kappa=1}^{k_\mu} \frac{B_{\mu,\kappa} z}{(z - z_{\infty,\mu})^\kappa} \right) \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow z_{\infty,\nu}} \left[B_0 \frac{z - z_{\infty,\nu}}{z} + B_\nu + \sum_{\mu=1, \mu \neq \nu}^{k_0} \sum_{\kappa=1}^{k_\mu} \frac{z - z_{\infty,\nu}}{z} \frac{B_{\mu,\kappa} z}{(z - z_{\infty,\mu})^\kappa} \right] \\ &= B_\nu \end{aligned}$$

Gebrochen-rationale Funktionen – Teil 11:

□ Berechnung der Partialbruchkoeffizienten B_ν bzw. $B_{\nu,\kappa}$:

□ Koeffizienten $B_{\nu,\kappa}$ bei **mehrfachen Polen** für **kontinuierliche** Signale:

$$B_{\nu,\kappa} = \frac{1}{(k_\nu - \kappa)!} \lim_{s \rightarrow s_{\infty,\nu}} \left[\frac{d^{k_\nu - \kappa}}{ds^{k_\nu - \kappa}} V(s) (s - s_{\infty,\nu})^{k_\nu} \right].$$

□ Koeffizienten $B_{\nu,\kappa}$ bei **mehrfachen Polen** für **diskrete** Signale:

$$B_{\nu,\kappa} = \frac{1}{(k_\nu - \kappa)!} \lim_{z \rightarrow z_{\infty,\nu}} \left[\frac{d^{k_\nu - \kappa}}{dz^{k_\nu - \kappa}} \frac{V(z)}{z} (z - z_{\infty,\nu})^{k_\nu} \right].$$

Transformationstabellen – Teil 1

Laplace-Transformation – Teil 1:

$v(t)$	$\mathcal{L}\{v(t)\}$	Konvergenzbereich
$\delta_{-1}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$	$\frac{1}{s}$	$\text{Re}\{s\} > 0$
$\cos(\omega_0 t - \varphi) \cdot \delta_{-1}(t)$	$\frac{s \cos(\varphi) + \omega_0 \sin(\varphi)}{s^2 + \omega_0^2}$	$\text{Re}\{s\} > 0$
$\cos(\omega_0 t) \cdot \delta_{-1}(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$	$\text{Re}\{s\} > 0$
$\sin(\omega_0 t) \cdot \delta_{-1}(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$	$\text{Re}\{s\} > 0$
$t^k \cdot \delta_{-1}(t) \quad k \in \mathbb{N}_0$	$\frac{k!}{s^{k+1}}$	$\text{Re}\{s\} > 0$

Laplace-Transformation – Teil 2:

$v(t)$	$\mathcal{L}\{v(t)\}$	Konvergenzbereich
$\delta_{-k}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} & t \geq 0 \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}$	$\frac{1}{s^k}$	$\text{Re}\{s\} > 0$
$te^{s_\infty t} \cdot \delta_{-1}(t)$	$\frac{1}{(s - s_\infty)^2}$	$\text{Re}\{s\} > \text{Re}\{s_\infty\}$
$t^2 e^{s_\infty t} \cdot \delta_{-1}(t)$	$\frac{2!}{(s - s_\infty)^3}$	$\text{Re}\{s\} > \text{Re}\{s_\infty\}$
$t^k e^{s_\infty t} \cdot \delta_{-1}(t)$	$\frac{k!}{(s - s_\infty)^{k+1}}$	$\text{Re}\{s\} > \text{Re}\{s_\infty\}$
$e^{s_\infty t} \cdot \delta_{-k}(t)$	$\frac{1}{(s - s_\infty)^k}$	$\text{Re}\{s\} > \text{Re}\{s_\infty\}$

Laplace-Transformation – Teil 3:

$v(t)$	$\mathcal{L}\{v(t)\}$	Konvergenzbereich
$e^{s_\infty t} [1 + s_\infty t] \cdot \delta_{-1}(t)$	$\frac{s}{(s - s_\infty)^2}$	$\text{Re}\{s\} > \text{Re}\{s_\infty\}$
$\frac{d^\kappa}{dt^\kappa} e^{s_\infty t} \cdot \delta_{-k}(t)$	$\frac{s^\kappa}{(s - s_\infty)^\kappa}$	$\text{Re}\{s\} > \text{Re}\{s_\infty\}$

z-Transformation – Teil 1:

$v(n)$	$\mathcal{Z}\{v(n)\}$	Konvergenzbereich
$\gamma_0(n) = \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ 1 & n = 0 \end{cases}$	1	ganze z -Ebene
$\gamma_{-1}(n) = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n \geq 0 \end{cases}$	$\frac{z}{z-1}$	$ z > 1$
$z_\infty^n \cdot \gamma_{-1}(n)$	$\frac{z}{z-z_\infty}$	$ z > z_\infty $

z-Transformation – Teil 2:

$v(n)$	$\mathcal{Z}\{v(n)\}$	Konvergenzbereich
$\cos(\Omega_0 n - \varphi) \cdot \gamma_{-1}(n)$	$\frac{z[z \cos(\varphi) - \cos(\Omega_0 + \varphi)]}{z^2 - 2z \cos(\Omega_0) + 1}$	$ z > 1$
$\cos(\Omega_0 n) \cdot \gamma_{-1}(n)$	$\frac{z[z - \cos(\Omega_0)]}{z^2 - 2z \cos(\Omega_0) + 1}$	$ z > 1$
$\sin(\Omega_0 n) \cdot \gamma_{-1}(n)$	$\frac{z \sin(\Omega_0)}{z^2 - 2z \cos(\Omega_0) + 1}$	$ z > 1$
$n \cdot z_\infty^n \cdot \gamma_{-1}(n)$	$\frac{z z_\infty}{(z - z_\infty)^2}$	$ z > z_\infty $
$n^2 \cdot z_\infty^n \cdot \gamma_{-1}(n)$	$\frac{z z_\infty (z + z_\infty)}{(z - z_\infty)^3}$	$ z > z_\infty $

z-Transformation – Teil 3:

$v(n)$	$\mathcal{Z}\{v(n)\}$	Konvergenzbereich
$\binom{n + \lambda - 1}{\kappa} z_{\infty}^{n + \lambda - \kappa - 1}$ $(\text{= } 0, \quad \forall n < \kappa + 1 - \lambda)$ mit $\lambda, \kappa \in \mathbb{N}_0, \lambda \leq \kappa + 1$	$\frac{z^{\lambda}}{(z - z_{\infty})^{\kappa + 1}}$	$ z > z_{\infty} $
$\binom{n}{\kappa} (\text{= } 0, \quad n < \kappa)$	$\frac{z}{(z - 1)^{\kappa + 1}}$	$ z > 1$

Verständnisfragen

Partnerarbeit:

Versuchen Sie in Partnerarbeit folgende Fragen zu beantworten:

- Gegeben sei folgende Übertragungsfunktion

$$H(z) = \frac{z + 0.9}{z - 0.9}$$

Versuchen Sie den Betrag dieser Funktion im gesamten z-Bereich zu skizzieren.

- Wie sieht der Betrag der Übertragungsfunktion aus (skizzieren Sie diesen)?

- Um welche Art von Filter handelt es sich?

Transformation von „Signum-Signalen“ – Teil 1:

□ Für kontinuierliche Signale:

Gegeben:

$$s(t) = \text{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t = 0, \\ -1, & t < 0. \end{cases}$$

Die Fourier-Transformation davon ist laut Existenzbedingung problematisch, da:

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} |s(t)| dt = 2 \int_{t=0}^{\infty} 1 dt \rightarrow \infty.$$

□ Für diskrete Signale:

Gegeben:

$$s(n) = \text{sgn}(n) = \begin{cases} 1, & n > 0, \\ 0, & n = 0, \\ -1, & n < 0. \end{cases}$$

Die Fourier-Transformation davon ist laut Existenzbedingung problematisch, da:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |s(n)| = 2 \sum_{n=1}^{\infty} 1 \rightarrow \infty.$$

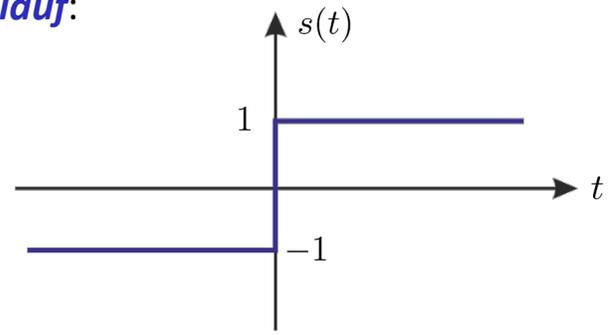
Dennoch existieren die Spektren $S(j\omega)$ bzw. $S(e^{j\Omega})$ als gewöhnliche Funktionen, die mit einem „Kunstgriff“ zu finden sind (siehe nächste Folie) und deren inverse Transformation auch wieder auf die Eingangssignale führen.

Zusammenhänge und Querverbindungen – Teil 2

Transformation von „Signum-Signalen“ – Teil 2:

□ Für kontinuierliche Signale:

Verlauf:



Es gilt:

Verallgem.
Ableitung

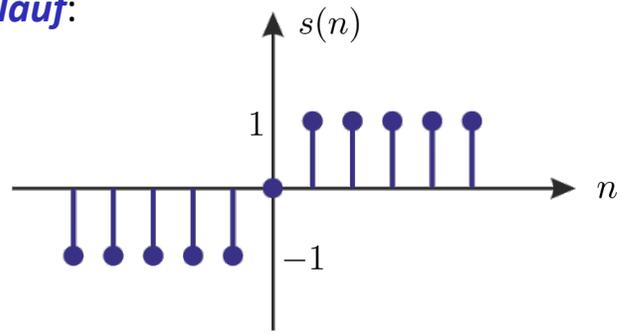
$$D\{s(t)\} = 2\delta_0(t)$$

$$S(j\omega) j\omega = 2 \cdot 1$$

$$\implies S(j\omega) = \frac{2}{j\omega}$$

□ Für diskrete Signale:

Verlauf:



Es gilt:

$$s(n) - s(n-1) = \gamma_0(n) + \gamma_0(n-1)$$

$$S(e^{j\Omega}) [1 - e^{-j\Omega}] = 1 [1 + e^{-j\Omega}]$$

$$\implies S(e^{j\Omega}) = \frac{1 + e^{-j\Omega}}{1 - e^{-j\Omega}}$$

Transformation von „Signum-Signalen“ – Teil 3:

□ Für diskrete Signale:

Die Spektralfunktion kann wie folgt umgeformt werden:

$$S(e^{j\Omega}) = \frac{1 + e^{-j\Omega}}{1 - e^{-j\Omega}}$$

... Ausklammern von $e^{-j\frac{\Omega}{2}}$...

$$= \frac{e^{-j\frac{\Omega}{2}} [e^{j\frac{\Omega}{2}} + e^{-j\frac{\Omega}{2}}]}{e^{-j\frac{\Omega}{2}} [e^{j\frac{\Omega}{2}} - e^{-j\frac{\Omega}{2}}]}$$

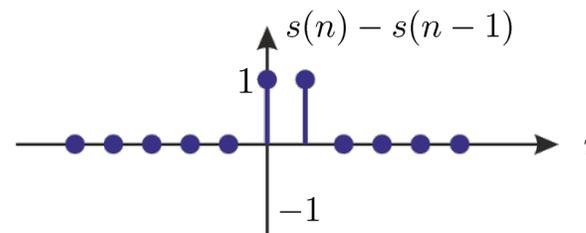
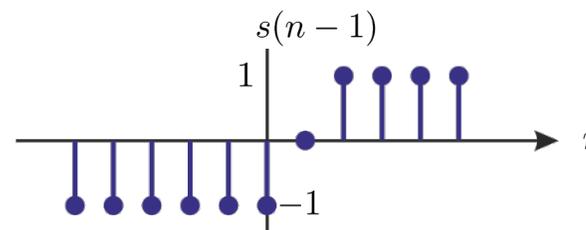
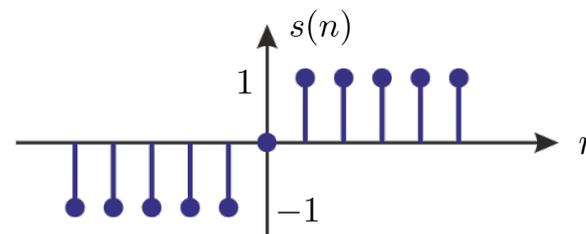
... cos- und sin-Funktionen einsetzen ...

$$= \frac{2 \cos\left(\frac{\Omega}{2}\right)}{2j \sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)}$$

... cot-Funktion einsetzen ...

$$= -j \cot\left(\frac{\Omega}{2}\right).$$

Zur Veranschaulichung der Differenzbildung:



Transformation von „Signum-Signalen“ – Teil 4:

□ Laplace- und z-Transformation:

Beide Transformationen existieren nicht – es lassen sich keine „passenden“ Werte $\sigma = \operatorname{Re}\{s\}$ bzw. $\rho = |z|$ finden, für welche die Existenzbedingungen (absolute Integrierbarkeit bzw. Summierbarkeit) erfüllbar wären.

Transformation von „Sprung-Signalen“ – Teil 1:

□ Für die **Laplace- und z-Transformation** haben wir bereits folgende Ergebnisse bestimmt:

□ Für kontinuierliche Signale:

$$v(t) = \delta_{-1}(t)$$


$$\mathcal{L}\{\delta_{-1}(t)\} = \frac{1}{s} \text{ für } \operatorname{Re}\{s\} > 0.$$

□ Für diskrete Signale:

$$v(n) = \gamma_{-1}(n)$$


$$\mathcal{Z}\{\gamma_{-1}(n)\} = \frac{1}{1 - z^{-1}} \text{ für } |z| > 1.$$

□ Der „Kunstgriff“ aus dem vorigen Beispiel führt hier nicht zum Erfolg: Die Rücktransformation des Ergebnisses ist nicht wieder der Sprung. Eine „gewöhnliche“ Fourier-Transformierte existiert tatsächlich nicht.

Aber: Mit Hilfe der vorherigen Ergebnisse findet man die Fourier-Transformierte von Sprungsignalen (siehe nächste Folie).

Transformation von „Sprung-Signalen“ – Teil 2:

□ Mit Hilfe der Signum-Funktion kann folgende Umformung durchgeführt werden:

□ Für kontinuierliche Signale:

$$\begin{aligned} \delta_{-1}(t) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t) \\ &\quad \circ \\ &\quad \bullet \\ \mathcal{F}\{\delta_{-1}(t)\} &= \frac{1}{2} 2\pi \delta_0(\omega) + \frac{1}{2} \frac{2}{j\omega} \\ &= \pi \delta_0(\omega) + \frac{1}{j\omega}. \end{aligned}$$

□ Für diskrete Signale:

$$\begin{aligned} \gamma_{-1}(n) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(n) + \frac{1}{2} \gamma_0(n) \\ &\quad \circ \\ &\quad \bullet \\ \mathcal{F}\{\gamma_{-1}(n)\} &= \pi \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \delta_0(\Omega - \lambda 2\pi) + \frac{1}{2j} \cot\left(\frac{\Omega}{2}\right) + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Hier liegt das Problem: Die Fourier-Transformierte ist nur anzugeben, wenn Distributionen, d.h. „verallgemeinerte“ Funktionen, zugelassen werden.

□ Offenbar gilt hier:

$$\mathcal{L}\{\delta_{-1}(t)\} \Big|_{s=j\omega} \neq \mathcal{F}\{\delta_{-1}(t)\} \qquad \mathcal{Z}\{\gamma_{-1}(n)\} \Big|_{z=e^{j\Omega}} \neq \mathcal{F}\{\gamma_{-1}(n)\}$$

Zusammenhang zwischen Sprungsignalen und Integration bzw. Summation – Teil 1:

□ Gemäß den Überlegungen, die zuvor angestellt wurden gilt für integrierte bzw. akkumulierte Signale:

□ Für kontinuierliche Signale:

Gegeben:

$$V(s) = \mathcal{L}\{v(t)\},$$

$$v_1(t) = \int_{\tau=-\infty}^t v(\tau) d\tau.$$

□ Für diskrete Signale:

Gegeben:

$$V(z) = \mathcal{Z}\{v(n)\},$$

$$v_1(n) = \sum_{\kappa=-\infty}^n v(\kappa).$$

Durch **Transformation der Integration bzw. der Summation** erhält man zum einen

$$V_1(s) = \frac{1}{s} V(s),$$

$$V_1(z) = \frac{z}{z-1} V(z),$$

zum anderen erhält man durch den **Faltungssatz**:

$$\begin{aligned} v_1(t) &= v(t) * \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} \\ &= v(t) * \delta_{-1}(t). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_1(n) &= v(n) * \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-1}\right\} \\ &= v(n) * \gamma_{-1}(n). \end{aligned}$$

Zusammenhang zwischen Sprungsignalen und Integration bzw. Summation – Teil 2:

□ Zusammengefasst ergibt sich ...

□ ... für kontinuierliche Signale:

$$\int_{\tau=-\infty}^t v(\tau) d\tau = v(t) * \delta_{-1}(t).$$

□ ... für diskrete Signale:

$$\sum_{\kappa=-\infty}^n v(\kappa) = v(n) * \gamma_{-1}(n).$$

Deutung: Die Integration bzw. die Akkumulation kann als Faltung mit einer Sprungfunktion aufgefasst werden!

Zusammenhang zwischen den einzelnen Transformationen – Teil 1:

□ Seien Signale mit endlicher Länge gegeben, d.h. es gilt ...

□ ... für kontinuierliche Signale:

Gegeben:

$$v(t) \in \mathbb{C}, \text{ für } t \in [0, T],$$

$$v(t) = 0, \text{ für } t \notin [0, T].$$

□ ... für diskrete Signale:

Gegeben:

$$v(n) \in \mathbb{C}, \text{ für } n \in \{0, \dots, M-1\},$$

$$v(n) = 0, \text{ für } n \notin \{0, \dots, M-1\}.$$

Für die Fourier-Transformationen erhält man dann ...

□ ... für kontinuierliche Signale:

$$V(j\omega) = \int_{t=0}^T v(t) e^{-j\omega t} dt.$$

□ ... für diskrete Signale:

$$V(e^{j\Omega}) = \sum_{n=0}^{M-1} v(n) e^{-j\Omega n}.$$

Solange $|v(t)|$ bzw. $|v(n)|$ **endlich groß** sind, ergeben sich hier stets auch **endlich große Integrale bzw. Summen** – die **Existenzbedingungen** der Fourier-Transformation sind **immer erfüllt!**

Zusammenhang zwischen den einzelnen Transformationen – Teil 2:

- Ähnliche Überlegungen können auch für die Laplace- und die z-Transformation angestellt werden. Für Signale mit endlicher Länge gilt ...

- ... im Kontinuierlichen:

$$V(j\omega) = \int_{t=0}^T v(t) e^{-st} dt.$$

- ... im Diskreten:

$$V(z) = \sum_{n=0}^{M-1} v(n) z^{-n}.$$

Weisen die Signale eine **Betragsbeschränkung** auf, so existieren die **Laplace- und die z-Transformierte** für alle s bzw. z .

Damit sind natürlich auch $\text{Re}\{s\} = \sigma = 0$ bzw. $|z| = \rho = 1$ erlaubt, d.h. es gilt für endlich lange, betragsbeschränkte ...

- ... kontinuierliche Signale immer:

$$\mathcal{F}\{v(t)\} = \mathcal{L}\{v(t)\} \Big|_{s=j\omega}.$$

- ... diskrete Signale immer:

$$\mathcal{F}\{v(n)\} = \mathcal{Z}\{v(n)\} \Big|_{z=e^{j\Omega}}.$$

Zusammenhang zwischen den einzelnen Transformationen – Teil 3:

□ Setzt man nun das zeitlich begrenzte Signal periodisch fort, d.h. es gilt im

□ ... im Kontinuierlichen:

$$v_p(t) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} v(t - \lambda T).$$

□ ... im Diskreten:

$$v_p(n) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} v(n - \lambda M).$$

Für periodische Signale kann daraus eine Fourier-Reihe bzw. eine Diskrete Fourier-Transformation mit den entsprechenden Koeffizienten entwickelt werden:

$$c_\mu = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) e^{-j\mu \frac{2\pi}{T} t} dt.$$

$$V_M(\mu) = \sum_{n=0}^{M-1} v(n) e^{-j\mu \frac{2\pi}{M} n}.$$

Gemäß den bisherigen Überlegungen bestehen folgende **Zusammenhänge zwischen den einzelnen Transformationen**:

□ Für kontinuierliche Signale:

$$c_\mu = \frac{1}{T} V(j\omega) \Big|_{\omega=\mu \frac{2\pi}{T}} = V(s) \Big|_{s=j\mu \frac{2\pi}{T}}.$$

Fourier-Reihe ... Fourier-Transf. ... Laplace-Transformation

Zusammenhang zwischen den einzelnen Transformationen – Teil 4:

- Für diskrete Signale:

$$V_M(\mu) = V(e^{j\Omega}) \Big|_{\Omega=\mu \frac{2\pi}{M}} = V(z) \Big|_{z=e^{j\mu \frac{2\pi}{M}}}.$$

DFT ... Fourier-Transf. ... z-Transformation

Zusammengefasst kann man sagen:

- Die Fourier-Reihen-Koeffizienten entsprechen Abtastwerten von $V(j\omega)$ bzw. $V(s)$ in äquidistanten Punkten $\omega = \mu 2\pi/T$ bzw. $s = j\mu 2\pi/T$.
- Die DFT-Koeffizienten entsprechen Abtastwerten von $V(e^{j\Omega})$ bzw. $V(z)$ in äquidistanten Punkten $\Omega = \mu 2\pi/M$ bzw. $z = e^{j\mu 2\pi/M}$.
- D.h. die spektralen Abtastwerte beschreiben hier vollständig das Zeitsignal. Damit ist in diesem besonderen Fall auch das kontinuierliche Spektrum durch Abtastwerte vollständig beschreibbar.

In bestimmten Fällen genügen Abtastwerte zur vollständigen Beschreibung kontinuierlicher Funktionen – hierzu am Ende der Vorlesung mehr!

Zusammenhang zwischen Grad-Differenz und Stetigkeit – Teil 1:

□ Man betrachte kontinuierliche Signale, deren Laplace-Spektrum folgende Form aufweist:

$$v(t) \circ \bullet V(s) = \frac{\sum_{\mu=0}^m \alpha_{\mu} s^{\mu}}{\sum_{\nu=0}^k \beta_{\nu} s^{\nu}} \Big|_{\beta_k=1}$$

Wir bezeichnen die Grad-Differenz mit $\Delta = k - m$ und nehmen an, dass diese größer als oder gleich Null sein soll. In diesem Fall liefert die inverse Laplace-Transformation (siehe vorherige Folien):

$$v(t) = B_0 \delta_0(t) + \sum_{\nu=1}^{k_0} \sum_{\kappa=1}^{k_{\nu}} B_{\nu,\kappa} e^{s_{\infty,\nu} t} \delta_{-\kappa}(t).$$

Gemäß den bisherigen Überlegungen kann der Koeffizient B_0 gemäß

$$B_0 = \lim_{s \rightarrow \infty} [V(s)] = \frac{\alpha_k}{\beta_k} \Big|_{\beta_k=1} = \alpha_k.$$

bestimmt werden.

Zusammenhang zwischen Grad-Differenz und Stetigkeit – Teil 2:

- Grad-Differenz $\Delta = 0$:

Dies bedeutet, dass $\alpha_k \neq 0$ und damit $B_0 \neq 0$. Als Konsequenz ergibt sich ein Impulsanteil im Zeitsignal.

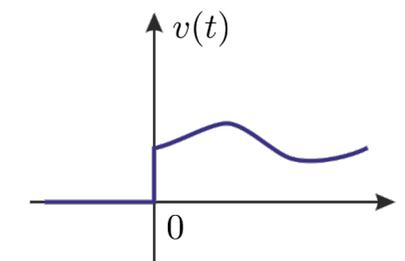
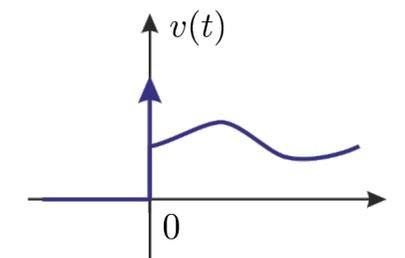
- Grad-Differenz $\Delta = 1$:

Dies bedeutet, dass $\alpha_k = 0$ und damit $B_0 = 0$. Daraus folgt, dass der Impulsanteil fehlt.

Betrachtet man nun statt $V(s)$ das Produkt $s V(s) \bullet \rightarrow \circ d/dt v(t)$, so ergibt sich folgender Grenzübergang:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} [s V(s)] = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s \alpha_{k-1} s^{k-1} + \dots}{s^k + \dots} = \alpha_{k-1}.$$

Dies bedeutet einen Impulsanteil in $d/dt v(t)$, was wiederum einen Sprunganteil in $v(t)$ zur Folge hat.

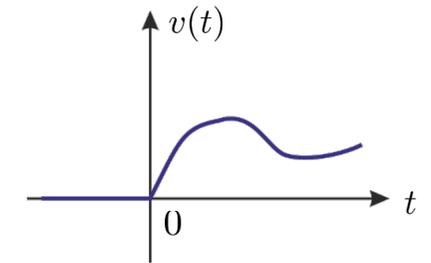


Zusammenhang zwischen Grad-Differenz und Stetigkeit – Teil 3:

□ Grad-Differenz $\Delta = 2$:

Dies bedeutet, dass $\alpha_k = 0$ und $\alpha_{k-1} = 0$ und damit $B_0 = 0$ und $\lim_{s \rightarrow \infty} [s V(s)] = 0$.

Daraus folgt, dass weder ein Impulsanteil noch ein Sprunganteil in $v(t)$ vorhanden ist, d.h. $v(t)$ ist stetig.



Man kann dies weitertreiben, indem man nun

$$s^2 V(s) \longleftrightarrow \frac{d^2}{dt^2} v(t)$$

betrachtet. Sollte der Grenzwert

$$\lim_{s \rightarrow \infty} [s^2 V(s)]$$

Null sein, d.h. $\Delta > 2$, so ist auch die Ableitung von $v(t)$ stetig.

Zusammenhang zwischen Grad-Differenz und Stetigkeit – Teil 4:

□ Folgerungen:

- Je höher die Grad-Differenz $\Delta = k - m$, desto „flacher“ ist die Funktion $v(t)$.
- Umgekehrt gilt auch: Je „flacher“ $v(t)$ (d.h. je mehr Ableitungen von $v(t)$ differenzierbar sind, desto höher ist die Grad-Differenz Δ .
- Mit wachsender Grad-Differenz Δ wird

$$\lim_{s \rightarrow \infty} [V(s)] = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{k-\Delta} s^{k-\Delta} + \dots}{s^k + \dots}$$

immer kleiner. ***D.h. hohe Frequenzen sind in Spektren „flacher“ Signale nur in geringem Maße vorhanden.***

Abschließende Bemerkungen

Betonung von Spektral-Darstellungen und Faltungen, weil ...

- ... das „**Denken**“ in **Exponential-Anteilen** etwas „Natürliches“ in den Ingenieurwissenschaften ist (insbesondere weil diese „Eigenfunktionen“ von LTI-Systemen sind).
- ... die **Faltung = Filterung** die **zentrale Beschreibung linearer, verschiebungsinvarianter Systeme** ist. Dort ist der Faltungssatz auch oft Teil der praktischen Realisierung (siehe Vorlesung „Digitale Signalverarbeitung“).

Abschließende Zusammenfassung

- ❑ Signale und Systeme – Einführung
- ❑ Signale
- ❑ Spektraldarstellungen determinierter Signale
 - ❑ Fourier-Reihe und Diskrete Fourier-Transformation
 - ❑ Fourier-Transformation
 - ❑ **Laplace- und z-Transformation**
 - ❑ **Definition und Begriffsklärung**
 - ❑ **Eigenschaften und Sätze**
 - ❑ **Beispiele**
 - ❑ **Zusammenhänge und Querverbindungen**
- ❑ Lineare Systeme
- ❑ Modulation