Signale und Systeme –
Spektraldarstellungen determinierter Signale (Teil 2)

Gerhard Schmidt

Christian-Albrechts-Universität zu Kiel
Technische Fakultät
Elektrotechnik und Informationstechnik
Digitale Signalverarbeitung und Systemtheorie

Christian-Albrechts-Universität zu Kiel

Gesamtübersicht – Teil 1

- Signale und Systeme – Einführung
  - Einführung und Begriffsklärung
  - Signale
  - Systeme
- Signale
  - Elementarsignale
  - Reaktion linearer Systeme auf Elementarsignale
  - Signalzerlegung in Elementarsignale
- Spektraldarstellungen determinierter Signale
  - Fourier-Reihe, Diskrete Fourier-Transformation
  - Fourier-Transformation
  - Laplace- und z-Transformation

Gesamtübersicht – Teil 2

- Lineare Systeme
  - Reaktionen auf Elementarsignale
  - Reaktionen auf beliebige Signale
  - Zusammenhänge zwischen Systemkenngrößen
  - Stabilität linearer Systeme
  - Gebrochen-rationale Übertragungsfunktionen
- Modulation
  - Grundlagen
  - Lineare Modulation- und Demodulationsverfahren
  - Abtasttheorem

Übersicht des nächsten Abschnitts

Definition und Begriffsklärung – Teil 1

Definition:

- Die ***inverse Fourier-Transformation*** ist folgendermaßen definiert:
  - Für kontinuierliche Signale:

$$\boxed{v(t) \;=\; \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\omega=-\infty}^{\infty} V(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega.}$$

  - Für diskrete Signale:

$$\boxed{v(n) \;=\; \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Omega=-\pi}^{\pi} V(e^{j\Omega})\, e^{j\Omega n}\, d\Omega.}$$

„Unendlich dichte“ Überlagerung von harmonischen Exponentialfunktionen.

- Die oben genannten Transformationsgleichungen stellen ***Verallgemeinerungen*** der Fourier-Reihe bzw. der Diskreten Fourier-Transformation dar, wobei
  - anstelle von „abzählbar unendlich“-vielen diskreten Frequenzen $\omega_\mu \;=\; \mu\,\frac{2\pi}{T}$
  - bzw. „endlich“ vielen diskreten Frequenzen $\Omega_\mu \;=\; \mu\,\frac{2\pi}{M}$

  nun „nicht-abzählbar unendlich“ viele Frequenzen im Frequenzband $\omega \in \mathbb{R}$ bzw. $\Omega \in [-\pi,\, \pi]$, $\Omega \in \mathbb{R}$ vorkommen.

Definition und Begriffsklärung – Teil 2

Anmerkungen – Teil 1:

- Die Größen $V(j\omega)$ bzw. $V(e^{j\Omega})$ sind analog zu den bisherigen Überlegungen als „***komplexe Amplituden***“ der harmonischen Exponentialfunktionen zu sehen. Sie müssen „geeignet gewählt“ werden.

- ***Bezeichnung*** der Funktionen $V(j\omega)$ bzw. $V(e^{j\Omega})$:

  Betrachtet man zunächst z.B. die inverse Fourier-Transformation für diskrete Signale und achtet dabei auf die Dimensionen der einzelnen Komponenten, so erhält man

$$\underbrace{v(n)} = \underbrace{\frac{1}{2\pi}} \int\limits_{\Omega=-\pi}^{\pi} \underbrace{V(e^{j\Omega})}\, \underbrace{e^{j\Omega n}}\, \underbrace{d\Omega}.$$

… mit der Dimension einer Frequenz.

… dimensionslos.

… gesucht!

… dimensionslos.

… mit der Dimension eines Signals.

Definition und Begriffsklärung – Teil 3

Anmerkungen – Teil 2:

- ***Bezeichnung*** der Funktionen $V(j\omega)$ bzw. $V(e^{j\Omega})$:

  Basierend auf den Überlegungen der letzen Folie kann die Dimension von $V(j\omega)$ bzw. $V(e^{j\Omega})$ als

  Amplitude / Frequenz

  angegeben werden. Die Größen $V(j\omega)$ bzw. $V(e^{j\Omega})$ werden daher auch als

  Amplitudendichte

  bezeichnet.

Definition:

- Die Amplitudendichten werden mittels der ***Fourier-Transformation*** bestimmt.
  - Für kontinuierliche Signale:

$$\boxed{V(j\omega) = \int_{t=-\infty}^{\infty} v(t)\, e^{-j\omega t}\, dt.}$$

  - Für diskrete Signale:

$$\boxed{V(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v(n)\, e^{-j\Omega n}.}$$

Definition und Begriffsklärung – Teil 4

Bezeichnungen:

- Die Verteilung der Exponentialanteile über den Frequenzen ω bzw. Ω wird als ***Spektrum*** bezeichnet.
  Dieses wird mittels der Fourier-Transformation der Signale $v(...)$ bestimmt. Die Bestimmung der Spektralanteile wird auch als ***Spektralanalyse*** bezeichnet.

- Häufig wird auch folgende ***Kurznotation*** verwendet:

  - Für kontinuierliche Signale:

    $$V(j\omega) = \mathcal{F}\{v(t)\} \text{ bzw.}$$
    $$V(j\omega) \bullet\!\!-\!\!\circ\, v(t),$$

    $$v(t) = \mathcal{F}^{-1}\{V(j\omega)\} \text{ bzw.}$$
    $$v(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, V(j\omega).$$

  - Für diskrete Signale:

    $$V(e^{j\Omega}) = \mathcal{F}\{v(n)\} \text{ bzw.}$$
    $$V(e^{j\Omega}) \bullet\!\!-\!\!\circ\, v(n),$$

    $$v(n) = \mathcal{F}^{-1}\{V(e^{j\Omega})\} \text{ bzw.}$$
    $$v(n) \circ\!\!-\!\!\bullet\, V(e^{j\Omega}).$$

Periodizitäten – Teil 1

Offensichtliche Entsprechungen:

- Fourier-Transformation
  für kontinuierliche Signale ⟷ Fourier-Reihenkoeffizienten

$$V(j\omega) = \int_{t=-\infty}^{\infty} v(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \qquad\qquad c_\mu = \frac{1}{T} \int_{t=t_0}^{t_0+T} v(t)\, e^{-j\mu \frac{2\pi}{T} t}\, dt$$

- Fourier-Transformation
  für diskrete Signale ⟷ DFT-Koeffizienten

$$V(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v(n)\, e^{-j\Omega n} \qquad\qquad V_M(\mu) = \sum_{n=0}^{M-1} v(n)\, e^{-j\mu \frac{2\pi}{M} n}$$

… aber für** $T \to \infty$ **bzw.** $M \to \infty$**, d.h. für unendlich lange Perioden. Damit sind die Transformationen für nicht-periodische Signale** $v(t)$ **bzw.** $v(n)$ **geeignet.

… Der Frequenzabstand** $2\pi/T$ **bzw.** $2\pi/M$ **geht hier gegen 0, d.h. die Frequenzen** ω **bzw.** Ω **sind unendlich dicht beieinander.

Periodizitäten – Teil 2

Periodizität des Spektrums diskreter Signale:

- Ersetzt man Ω durch $\Omega + \lambda\, 2\pi$ in der Definition der Fourier-Transformation für diskrete Signale, so ergibt sich:

$$V\big(e^{j(\Omega+\lambda\,2\pi)}\big) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v(n)\, e^{-j(\Omega+\lambda\,2\pi)n}$$

… Exponentialterm aufteilen …

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} v(n)\, e^{-j\Omega n}\, \underbrace{e^{-j\lambda\,2\pi n}}_{=1\,\forall\, n,\,\lambda\in\mathbb{Z}}$$

… Vereinfachung einsetzen …

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} v(n)\, e^{-j\Omega n} = V\big(e^{j\Omega}\big).$$

D.h. die Spektren diskreter Signale sind 2π–periodisch bzw. M–periodisch (falls die Signale zusätzlich noch periodisch [mit Periode M] sind).

Periodizitäten – Teil 3

Symmetrien zwischen Zeit- und Frequenzbereich – Teil 1:

- Es können auch periodische Funktionen mit Variablen $\neq t$ in Fourier-Reihendarstellung gebracht werden. Das gilt auch für $V(e^{j\Omega})$. Dies kann als 2π–periodische Funktion über der kontinuierlichen Variable Ω aufgefasst werden, d.h.

$$\mu \frac{2\pi}{T} \longrightarrow \mu \frac{2\pi}{2\pi} = \mu.$$

Damit können folgende Reihenkoeffizienten berechnet werden:

$$c_\mu = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega=\Omega_0}^{\Omega_0+2\pi} V(e^{j\Omega})\, e^{-j\mu\frac{2\pi}{2\pi}\Omega}\, d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega=\Omega_0}^{\Omega_0+2\pi} V(e^{j\Omega})\, e^{-j\mu\Omega}\, d\Omega.$$

Fourier-Reihenentwicklung für kontinuierliche Signale

Für $n = -\mu$ und $\Omega_0 = -\pi$ ergibt sich:

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega=-\pi}^{\pi} V(e^{j\Omega})\, e^{j\Omega n}\, d\Omega = v(n).$$

Das heißt: die Signalwerte $v(-n)$ entsprechen den Fourier-Reihenkoeffizienten des periodischen Spektrums $V(e^{j\Omega})$!

Periodizitäten – Teil 4

Symmetrien zwischen Zeit- und Frequenzbereich – Teil 2:

- Die in der vorigen Folie aufgezeigte ***Symmetrie der Betrachtungen im Zeit- und Frequenzbereich*** gilt sehr allgemein. Hier lässt sie sich insbesondere in folgendem ***Zuordnungsschema*** darstellen:

Signal	Spektrum
$v(t)$: kontinuierlich, nicht periodisch	nicht periodisch, kontinuierlich: $V(j\omega)$
$v(t)$: kontinuierlich, periodisch	nicht periodisch, diskret: c_μ
$v(n)$: diskret, nicht periodisch	periodisch, kontinuierlich : $V(e^{j\Omega})$
$v(n)$: diskret, periodisch	periodisch, diskret: $V_M(\mu)$

Fehlerbetrachtung, Bessel-Ungleichung, Parseval‘sche Gleichung und Orthogonalität – Teil 1

Frage – Teil 1:

- Warum ist in der „verallgemeinerten Summen-Darstellung“ der Signale $v(t)$ bzw. $v(n)$ (inverse Fourier-Transformation) gerade der Ausdruck $V(j\omega)$ bzw. $V(e^{j\Omega})$ gemäß der Fourier-Transformation einzusetzen?

  Hier ist die Antwort ähnlich wie bei der Fourier-Reihenentwicklung:

  - Zunächst definiert man eine das Signal approximierende Funktion $g(t)$ bzw. eine Folge $g(n)$ gemäß

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\omega=-\omega_g}^{\omega_g} V(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

„Summe“ von Exponentialanteilen in begrenztem Frequenzband ($< \infty$).

bzw.

$$g(n) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Omega=-\Omega_g}^{\Omega_g} V(e^{j\Omega})\, e^{j\Omega n}\, d\Omega.$$

„Summe“ von Exponentialanteilen in begrenztem Frequenzband ($< 2\pi$).

Fehlerbetrachtung, Bessel-Ungleichung, Parseval'sche Gleichung und Orthogonalität – Teil 2

Frage – Teil 2:

- Anschließend wird $v(\ldots)$ durch $g(\ldots)$ nach dem Kriterium „kleinster, mittlerer, quadratischer Fehler" approximiert:

$$\epsilon = \int_{-\infty}^{\infty} \left|v(t) - g(t)\right|^2 dt \quad \text{bzw.} \quad \epsilon = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|v(n) - g(n)\right|^2.$$

- Die Definition des Signals $g(\ldots)$ liefert zusammen mit dem Optimierungskriterium gerade die Fourier-Transformation für die frei wählbaren Funktionen $V(\ldots)$.

Dies geht nicht mehr einfach nur durch Ableiten nach $V(\ldots)$ und Nullsetzen der Ableitung wie bei den diskreten freien Parametern c_μ bzw. $V_M(\mu)$! Hier wird ein sog. Variationsansatz notwendig.

- Das Ergebnis gilt dabei für jede Grenzfrequenz $\omega_g \leq \infty$ bzw. $\Omega_g \leq \pi$ und liefert dabei minimalen Fehler $\epsilon_{\min}$!

Fehlerbetrachtung, Bessel-Ungleichung, Parseval'sche Gleichung und Orthogonalität – Teil 3

Fehlerbetrachtung:

- Ähnlich wie bei der Herleitung der Fourier-Reihe und der Diskreten Fourier-Transformation ergeben sich einige interessante ***Zusammenhänge zwischen „Zeit"-Signaleigenschaften und Spektren*** aus der Betrachtung des kleinsten, mittleren, quadratischen Fehlers.

Für die Gesamtenergie gilt …

… im Kontinuierlichen:

$$w_v(\infty) = \int\limits_{t=-\infty}^{\infty} \big|v(t)\big|^2 \, dt.$$

… im Diskreten:

$$w_v(\infty) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \big|v(n)\big|^2.$$

Analog gilt für die Gesamtenergie des approximierenden, bandbegrenzten Signals:

$$\begin{aligned} w_g(\infty) &= \int\limits_{t=-\infty}^{\infty} \big|g(t)\big|^2 \, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\omega=-\omega_g}^{\omega_g} \big|V(j\omega)\big|^2 \, d\omega. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_g(\infty) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \big|g(n)\big|^2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Omega=-\Omega_g}^{\Omega_g} \big|V(e^{j\Omega})\big|^2 \, d\Omega. \end{aligned}$$

Fehlerbetrachtung, Bessel-Ungleichung, Parseval'sche Gleichung und Orthogonalität – Teil 4

Bessel'sche Ungleichung:

- Gemäß des Optimierungskriteriums gilt …

… im Kontinuierlichen:

$$\epsilon_{\min} = w_v(\infty) - w_g(\infty) \geq 0.$$

… im Diskreten:

$$\epsilon_{\min} = w_v(\infty) - w_g(\infty) \geq 0.$$

Aufgrund des quadratischen Fehlerkriteriums

Damit gilt dann auch …

… im Kontinuierlichen:

$$\int\limits_{t=-\infty}^{\infty} \big|v(t)\big|^2 \, dt \geq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\omega=-\omega_g}^{\omega_g} \big|V(j\omega)\big|^2 \, d\omega.$$

… im Diskreten:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \big|v(n)\big|^2 \geq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Omega=-\Omega_g}^{\Omega_g} \big|V(e^{j\Omega})\big|^2 \, d\Omega.$$

Dies wird als Bessel'sche Ungleichung der Fourier-Transformation bezeichnet …

Parseval'sche Gleichung – Teil 1:

- Bildet man die Grenzübergänge $\omega_g \to \infty$ bzw. $\Omega_g \to \pi$, so erhält man …

… im Kontinuierlichen:

$$w_g(\infty) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\omega=-\infty}^{\infty} \left|V(j\omega)\right|^2 d\omega = w_v(\infty).$$

… im Diskreten:

$$w_g(\infty) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Omega=-\pi}^{\pi} \left|V(e^{j\Omega})\right|^2 d\Omega = w_v(\infty).$$

Dies wird als Parseval'sche Gleichung der Fourier-Transformation bezeichnet …

Daraus folgt …

… im Kontinuierlichen:

Für $\omega_g \to \infty$ ist $\epsilon_{\min} = 0$.

… im Diskreten:

Für $\Omega_g \to \pi$ ist $\epsilon_{\min} = 0$.

D.h. die bandbegrenzte Approximation durch $g(\ldots)$ wird zur fehlerfreien Identität bei Wegfall der Bandbegrenzung!

Fehlerbetrachtung, Bessel-Ungleichung, Parseval‘sche Gleichung und Orthogonalität – Teil 6

Parseval‘sche Gleichung – Teil 2:

- Für die Bestimmung der Signale aus den Fourier-Spektren ergibt sich dann …

… für kontinuierliche Signale:

$$v(t) \;=\; \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\omega=-\infty}^{\infty} V(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega.$$

Gilt exakt fast überall – mit Ausnahmen an Unstetigkeitsstellen (allerdings tragen diskrete Punkte auf der t-Achse nichts zum Fehlerintegral bei).

… für diskrete Signale

$$v(n) \;=\; \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Omega=-\pi}^{\pi} V(e^{j\Omega})\, e^{j\Omega n}\, d\Omega.$$

Gilt exakt überall – bei Folgen gibt es keine Unstetigkeitsstellen!

Verständnisfragen

Partnerarbeit:

Versuchen Sie in Partnerarbeit folgende Fragen zu beantworten:

- In welche „Schwierigkeiten" geraten Sie, wenn Sie das Signal $v(t) = 1 + \sin(\omega_0 t)$ Fourier-transformieren wollen? Was können Sie stattdessen tun, wenn Sie Informationen über das Spektrum dieses Signals erhalten wollen?

  ……………………………………………………………………………………………………

  ……………………………………………………………………………………………………

- Welche spektralen Eigenschaften hat ein diskretes Signal, welche hat ein periodisches, kontinuierliches Signal?

  ……………………………………………………………………………………………………

  ……………………………………………………………………………………………………

- Was sind die Auswirkungen der Parseval'schen Beziehungen für Optimierungen, welche das Fehlerquadrat minimieren?

  ……………………………………………………………………………………………………

  ……………………………………………………………………………………………………

Existenzbedingungen – Teil 1

Herleitung der Existenzbedingungen – Teil 1:

- Die Berechnungen von $V(j\omega)$ bzw. $V(e^{j\Omega})$ beinhalten Integrale bzw. Summen über unendlich ausgedehnte Funktionen bzw. Folgen. Es ist nicht selbstverständlich, dass diese Integrale bzw. Summen existieren (im Sinne endlich großer Funktionswerte für beliebige Werte von ω bzw. Ω).

Fordert man endliche Funktionswerte, so muss Folgendes …

… für kontinuierliche Signale gelten:

$$\big|V(j\omega)\big| \;=\; \left|\int\limits_{t=-\infty}^{\infty} v(t)\, e^{-j\omega t}\, dt\right| \;\leq\; M \;<\; \infty.$$

… für diskrete Signale gelten:

$$\big|V(e^{j\Omega})\big| \;=\; \left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} v(n)\, e^{-j\Omega n}\right| \;\leq\; M \;<\; \infty.$$

Existenzbedingungen – Teil 2

Herleitung der Existenzbedingungen – Teil 2:

- Die Beträge der Integrale bzw. der Summen kann man wie folgt abschätzen:

$$\left| \int_{t=-\infty}^{\infty} v(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \right| \le \int_{t=-\infty}^{\infty} \big|v(t)\big| \, \overbrace{\big|e^{-j\omega t}\big|}^{=1} \, dt = \int_{t=-\infty}^{\infty} \big|v(t)\big| \, dt$$

$$\left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} v(n)\, e^{-j\Omega n} \right| \le \sum_{n=-\infty}^{\infty} \big|v(n)\big| \, \overbrace{\big|e^{-j\Omega n}\big|}^{=1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \big|v(n)\big|$$

- Damit gilt dann …

… im Kontinuierlichen:

$$\big|V(j\omega)\big| \le \int_{t=-\infty}^{\infty} \big|v(t)\big| \, dt.$$

… im Diskreten:

$$\big|V(e^{j\Omega})\big| \le \sum_{n=-\infty}^{\infty} \big|v(n)\big|.$$

Existenzbedingungen – Teil 3

Herleitung der Existenzbedingungen – Teil 3:

- Die bisherigen Überlegungen können wie folgt zusammengefasst werden:

Wenn gilt,

$$\int\limits_{t=-\infty}^{\infty} \big|v(t)\big|\, dt \;\leq\; M_1 \;<\; \infty,$$

d.h. $v(t)$ ist absolut integrierbar, bzw. wenn gilt

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \big|v(n)\big| \;\leq\; M_1 \;<\; \infty,$$

d.h. $v(n)$ ist absolut summierbar, dann existiert auch die zugehörige Fourier-Transformation.

Diese Bedingung ist hinreichend, aber nicht notwendig! Da gemäß der Herleitung lediglich

$$\big|V(j\omega)\big| \;\leq\; \int\limits_{t=-\infty}^{\infty} \big|v(t)\big|\, dt.$$

und

$$\big|V(e^{j\Omega})\big| \;\leq\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} \big|v(n)\big|.$$

gilt, kann das Spektrum Werte kleiner als ∞ annehmen, selbst wenn die Bedingungen links verletzt sind.

Eigenschaften und Sätze – Teil 1

Linearität:

- Für kontinuierliche Signale:

  Gegeben:

  $$V_{1,2}(j\omega) \;=\; \mathcal{F}\Big\{v_{1,2}(t)\Big\}.$$

  Es gilt dann für die Transformation des zusammengesetzten Signals:

  $$\mathcal{F}\Big\{\alpha_1\,v_1(t) + \alpha_2\,v_2(t)\Big\} \;=\; \alpha_1\,V_1(j\omega) + \alpha_2\,V_2(j\omega).$$

- Für diskrete Signale:

  Gegeben:

  $$V_{1,2}(e^{j\Omega}) \;=\; \mathcal{F}\Big\{v_{1,2}(n)\Big\}.$$

  Es gilt dann für die Transformation des zusammengesetzten Signals:

  $$\mathcal{F}\Big\{\alpha_1\,v_1(n) + \alpha_2\,v_2(n)\Big\} \;=\; \alpha_1\,V_1(e^{j\Omega}) + \alpha_2\,V_2(e^{j\Omega})$$

… Das heißt, die Fourier-Transformation ist sowohl im Kontinuierlichen wie auch im Diskreten eine lineare Operation!

Modulation – Teil 1:

- Für kontinuierliche Signale:

  Gegeben:

  $$V(j\omega) = \mathcal{F}\{v(t)\}.$$

  Hierzu wird eine ***modulierte Signalvariante*** gemäß

  $$v_1(t) = v(t)\, e^{j\omega_0 t}$$

  definiert. ***Gesucht*** ist nun die zugehörige Fourier-Transformation (in Abhängigkeit von $V(j\omega)$):

  $$V_1(j\omega) = \int\limits_{t=-\infty}^{\infty} v_1(t)\, e^{-j\omega t}\, dt.$$

- Für diskrete Signale:

  Gegeben:

  $$V(e^{j\Omega}) = \mathcal{F}\{v(n)\}.$$

  Hierzu wird eine ***modulierte Folgenvariante*** gemäß

  $$v_1(n) = v(n)\, e^{j\Omega_0 n}$$

  definiert. ***Gesucht*** ist nun die zugehörige Fourier-Transformation (in Abhängigkeit von $V(e^{j\Omega})$):

  $$V_1(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_1(n)\, e^{-j\Omega n}.$$

Modulation – Teil 2:

- Für kontinuierliche Signale:

Einsetzen ergibt:

$$\begin{aligned} V_1(j\omega) &= \int\limits_{t=-\infty}^{\infty} v_1(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \\ &= \int\limits_{t=-\infty}^{\infty} v(t)\, e^{-j(\omega-\omega_0)t}\, dt \\ &= V\big(j(\omega-\omega_0)\big). \end{aligned}$$

Zusammengefasst ergibt sich:

$$\mathcal{F}\Big\{v(t)\, e^{j\omega_0 t}\Big\} = V\big(j(\omega-\omega_0)\big).$$

- Für diskrete Signale:

Einsetzen ergibt:

$$\begin{aligned} V_1(e^{j\Omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_1(n)\, e^{-j\Omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} v(n)\, e^{-j(\Omega-\Omega_0)n} \\ &= V\big(e^{j(\Omega-\Omega_0)}\big). \end{aligned}$$

Zusammengefasst ergibt sich:

$$\mathcal{F}\Big\{v(n)\, e^{j\Omega_0 n}\Big\} = V\big(e^{j(\Omega-\Omega_0)}\big).$$

Daraus folgt: Eine Multiplikation mit einem komplexen Drehfaktor im Zeitbereich bewirkt eine Verschiebung im Spektralbereich.

Eigenschaften und Sätze – Teil 4

Verschiebung – Teil 1:

- Für kontinuierliche Signale:

  Gegeben:

  $$V(j\omega) = \mathcal{F}\{v(t)\}.$$

  Hierzu wird eine ***verschobene Signalvariante*** gemäß

  $$v_1(t) = v(t - t_0)$$

  definiert. ***Gesucht*** ist nun die zugehörige Fourier-Transformation (in Abhängigkeit von $V(j\omega)$):

  $$V_1(j\omega) = \int\limits_{t=-\infty}^{\infty} v_1(t)\, e^{-j\omega t}\, dt.$$

- Für diskrete Signale:

  Gegeben:

  $$V(e^{j\Omega}) = \mathcal{F}\{v(n)\}.$$

  Hierzu wird eine ***verschobene Folgenvariante*** gemäß

  $$v_1(n) = v(n - n_0)$$

  definiert. ***Gesucht*** ist nun die zugehörige Fourier-Transformation (in Abhängigkeit von $V(e^{j\Omega})$):

  $$V_1(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_1(n)\, e^{-j\Omega n}.$$

Eigenschaften und Sätze – Teil 5

Verschiebung – Teil 2:

- Für kontinuierliche Signale:

Einsetzen ergibt:

$$\begin{aligned} V_1(j\omega) &= \int_{t=-\infty}^{\infty} v(t-t_0)\, e^{-j\omega t}\, dt \\ &= e^{-j\omega t_0} \int_{t=-\infty}^{\infty} v(t-t_0)\, e^{-j\omega (t-t_0)}\, dt \end{aligned}$$

… Substitution von $\tau = t - t_0$ und $d\tau = dt$ …

$$\begin{aligned} &= e^{-j\omega t_0} \int_{\tau=-\infty}^{\infty} v(\tau)\, e^{-j\omega \tau}\, d\tau \\ &= e^{-j\omega t_0}\, V\big(j\omega\big). \end{aligned}$$

Zusammengefasst ergibt sich:

$$\mathcal{F}\Big\{v(t-t_0)\Big\} = e^{-j\omega t_0}\, V\big(j\omega\big).$$

- Für diskrete Signale:

Einsetzen ergibt:

$$\begin{aligned} V_1(e^{j\Omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} v(n-n_0)\, e^{-j\Omega n} \\ &= e^{-j\Omega n_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} v(n-n_0)\, e^{-j\Omega (n-n_0)} \end{aligned}$$

… Substitution von $k = n - n_0$ …

$$\begin{aligned} &= e^{-j\Omega n_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} v(k)\, e^{-j\Omega k} \\ &= e^{-j\Omega n_0}\, V\big(e^{j\Omega}\big). \end{aligned}$$

Zusammengefasst ergibt sich:

$$\mathcal{F}\Big\{v(n-n_0)\Big\} = e^{-j\Omega n_0}\, V\big(e^{j\Omega}\big).$$

Eigenschaften und Sätze – Teil 6

Verschiebung – Teil 3:

Anmerkungen:

- Eine Verschiebung des Signals ändert nicht die „spektrale Zusammensetzung“, d.h. $|V(...)|$, geändert wird lediglich die ***Phase*** der Spektralkomponenten. Damit wird die zeitliche Zuordnung der Spektralkomponenten so geändert, dass an einer verschobenen Stelle ($t = t_0$ bzw. $n = n_0$) die selbe Signalform entsteht.

- Die Phasenänderung erfolgt offenbar linear in ω bzw. Ω, d.h. die Verschiebung wird beschrieben durch eine ***additive, lineare Phase***.

- Man beachte wieder die ***Symmetrie***, welche bei Vergleich der Verschiebung und der Modulation sichtbar wird:

  - Signal $v(...)\, e^{j\cdots}$ $\circ\!\!-\!\!\bullet$ Verschiebung von $V(...)$,
  - Spektrum $V(...)\, e^{j\cdots}$ $\bullet\!\!-\!\!\circ$ Verschiebung von $v(...)$.

… Man beachte auch die Symmetrien, die sich bei der Fourier-Reihe bzw. bei der DFT ergeben haben!

Ähnlichkeitssatz bei der kontinuierlichen Fourier-Transformation – Teil 1:

- ***Gegeben***:

$$V(j\omega) = \mathcal{F}\{v(t)\}.$$

Hierzu wird eine ***gespreizte bzw. gestauchte Signalvariante*** gemäß

$$v_1(t) = v(at)$$

definiert. ***Gesucht*** ist nun die zugehörige Fourier-Transformation (in Abhängigkeit von $V(j\omega)$):

$$V_1(j\omega) = \int_{t=-\infty}^{\infty} v(at)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

… Umformen des Exponentialterms …

$$= \int_{t=-\infty}^{\infty} v(at)\, e^{-j\frac{\omega}{a}at}\, dt$$

… Substitution von $x = at$ und $1/a\, dx = dt$ …

$$= \int_{x=-\infty}^{\infty} v(x)\, e^{-j\frac{\omega}{a}x}\, \frac{1}{|a|}\, dx = \frac{1}{|a|}\, V\Big(j\frac{\omega}{a}\Big).$$

Für negative a müssen zusätzlich noch die Integrationsgrenzen (und damit das Vorzeichen des Integrals) getauscht werden.

Eigenschaften und Sätze – Teil 8

Ähnlichkeitssatz bei der kontinuierlichen Fourier-Transformation – Teil 2:

- ***Zusammengefasst gilt***:

$$\mathcal{F}\{v(at)\} = \frac{1}{|a|} V\Big(j\frac{\omega}{a}\Big).$$

Dabei gilt:

  - Eine Stauchung von $v(t)$, d.h. $a > 1$, bewirkt eine Spreizung des Spektrums $V(j\omega)$,
  - eine Spreizung von $v(t)$, d.h. $a < 1$, bewirkt eine Stauchung des Spektrums $V(j\omega)$.

- Ähnliche Überlegungen können auch für Fourier-Reihen durchgeführt werden.

Verständnisfragen – Teil 1

Partnerarbeit:

Versuchen Sie in Partnerarbeit folgende Fragen zu beantworten:

- Was passiert im Spektralbereich, wenn Sie statt des Signals $v(t)$ das Signal $v(2t)$ transformieren?

  ....

  ....

- Wozu könnten bei Sprach- oder Musiksignalen solche zeitlichen Stauchungen oder Streckungen nützlich sein?

  ....

  ....

- Warum kann man durch zeitliche Streckung oder Stauchung allein, keine Männerstimme in eine Frauenstimme verwandeln? Was könnte noch notwendig sein?

  ....

  ....

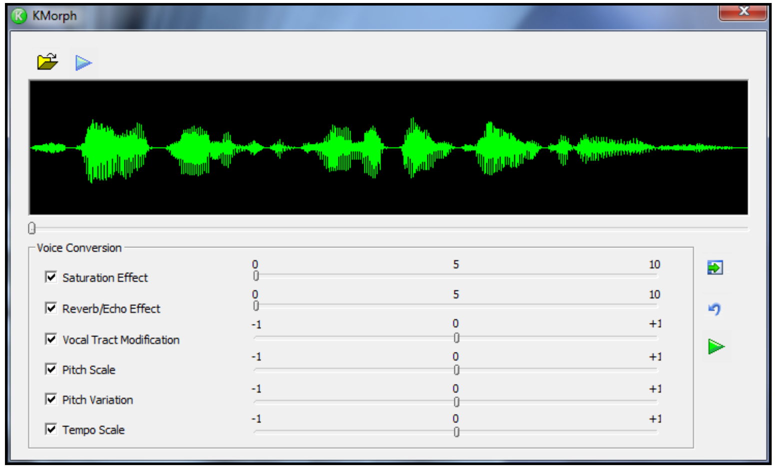
Verständnisfragen – Teil 2

Beispiel für eine Signalveränderung:

Demoprogramm zur Modifikation von Sprachsignalen (voice morphing) on

Prof. Steve Young,
University of Cambridge

Dr. Hui Ye,
University of Cambridge



Eigenschaften und Sätze – Teil 9

Symmetriesatz bei der kontinuierlichen Fourier-Transformation – Teil 1:

- ***Gegeben***:

$$V(j\omega) = \mathcal{F}\{v(t)\}.$$

Nun sei als Signal gegeben:

$$v_1(t) = V(jt).$$

Gesucht ist nun die zugehörige Fourier-Transformation (in Abhängigkeit von $v(t)$):

$$V_1(j\omega) = \int\limits_{t=-\infty}^{\infty} v_1(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

… Einsetzen der Signaldefinition und Umformen …

$$= 2\pi \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int\limits_{t=-\infty}^{\infty} V(jt)\, e^{j(-\omega)t}\, dt}_{v(-\omega)}$$

… Einsetzen der Definition der inversen Fourier-Transformation …

$$= 2\pi\, v(-\omega).$$

Eigenschaften und Sätze – Teil 10

Symmetriesatz bei der kontinuierlichen Fourier-Transformation – Teil 2:

- ***Zusammengefasst gilt***:

$$\mathcal{F}\{V(jt)\} \;=\; 2\pi\, v(-\omega).$$

  Das heißt:

  - Bis auf den Vorfaktor 2π und eine Vorzeichenumkehr in der Variablen stimmen Transformation und zugehörige inverse Transformation überein.

- Dieser Zusammenhang ist nützlich bei der Berechnung konkreter Transformationen.

Eigenschaften und Sätze – Teil 11

Symmetriebeziehungen zwischen Signal- und Spektralkomponenten – Teil 1:

- Eine Zerlegung der Spektren in ***Real- und Imaginärteile***, sowie in gerade und ungerade Anteile ergibt

… für kontinuierliche Signale:

$$\begin{aligned} V(j\omega) &= V_{\mathrm{re}}(j\omega) + j\,V_{\mathrm{im}}(j\omega), \\ V_{\mathrm{ge}}(j\omega) &= \frac{1}{2}\Big[V(j\omega) + V(-j\omega)\Big] \\ &= V_{\mathrm{ge}}(-j\omega), \\ V_{\mathrm{un}}(j\omega) &= \frac{1}{2}\Big[V(j\omega) - V(-j\omega)\Big] \\ &= -V_{\mathrm{un}}(-j\omega). \end{aligned}$$

… für diskrete Signale:

$$\begin{aligned} V(e^{j\Omega}) &= V_{\mathrm{re}}(e^{j\Omega}) + j\,V_{\mathrm{im}}(e^{j\Omega}), \\ V_{\mathrm{ge}}(e^{j\Omega}) &= \frac{1}{2}\Big[V(e^{j\Omega}) + V(e^{-j\Omega})\Big] \\ &= V_{\mathrm{ge}}(e^{-j\Omega}), \\ V_{\mathrm{un}}(e^{j\Omega}) &= \frac{1}{2}\Big[V(e^{j\Omega}) - V(e^{-j\Omega})\Big] \\ &= -V_{\mathrm{un}}(e^{-j\Omega}). \end{aligned}$$

Analog zur Fourier-Reihe bzw. zur Diskreten Fourier-Transformation können Symmetrie-Schemata bestimmt werden.

Symmetriebeziehungen zwischen Signal- und Spektralkomponenten – Teil 2:

- Symmetrieschemata …
  - … für kontinuierliche Signale:

$$v(t) = v_{\text{re,ge}}(t) + v_{\text{re,un}}(t) + j\,v_{\text{im,ge}}(t) + j\,v_{\text{im,un}}(t)$$

$$V(j\omega) = V_{\text{re,ge}}(j\omega) + V_{\text{re,un}}(j\omega) + j\,V_{\text{im,ge}}(j\omega) + j\,V_{\text{im,un}}(j\omega).$$

  - … für diskrete Signale:

$$v(n) = v_{\text{re,ge}}(n) + v_{\text{re,un}}(n) + j\,v_{\text{im,ge}}(n) + j\,v_{\text{im,un}}(n)$$

$$V(e^{j\Omega}) = V_{\text{re,ge}}(e^{j\Omega}) + V_{\text{re,un}}(e^{j\Omega}) + j\,V_{\text{im,ge}}(e^{j\Omega}) + j\,V_{\text{im,un}}(e^{j\Omega}).$$

Symmetriebeziehungen zwischen Signal- und Spektralkomponenten – Teil 3:

- Konsequenzen für den Spezialfall

$$v(...) \in \mathbb{R},$$

d.h. $v_{\mathrm{im,ge}}(...) = v_{\mathrm{im,un}}(...) = 0.$

Da der Imaginärteil des Signals Null ist, ergibt sich für die Spektraldarstellungen …

… von kontinuierlichen Signalen:

$$V_{\mathrm{im,ge}}(j\omega) = V_{\mathrm{re,un}}(j\omega) = 0.$$

… von diskreten Signalen:

$$V_{\mathrm{im,ge}}(e^{j\Omega}) = V_{\mathrm{re,un}}(e^{j\Omega}) = 0.$$

Damit ergibt sich für die Spektraldarstellungen von reellen …

… kontinuierlichen Signalen:

$$\begin{aligned} V(j\omega) &= V_{\mathrm{re,ge}}(j\omega) + j\,V_{\mathrm{im,un}}(j\omega), \\ V_{\mathrm{re,ge}}(j\omega) &= \mathrm{Re}\{V(j\omega)\}, \\ V_{\mathrm{im,un}}(j\omega) &= \mathrm{Im}\{V(j\omega)\}. \end{aligned}$$

← ***gerade*** →

← ***ungerade*** →

… diskreten Signalen:

$$\begin{aligned} V(e^{j\Omega}) &= V_{\mathrm{re,ge}}(e^{j\Omega}) + j\,V_{\mathrm{im,un}}(e^{j\Omega}), \\ \mathrm{Re}\{V(e^{j\Omega})\} &= V_{\mathrm{re,ge}}(e^{j\Omega}), \\ \mathrm{Im}\{V(e^{j\Omega})\} &= V_{\mathrm{im,un}}(e^{j\Omega}). \end{aligned}$$

Eigenschaften und Sätze – Teil 14

Symmetriebeziehungen zwischen Signal- und Spektralkomponenten – Teil 4:

- Konsequenzen für den Spezialfall $v(...) \in \mathbb{R}$:
  - Umkehrung der „Frequenzrichtung“

    … für kontinuierliche Signale:

$$\begin{aligned} V(-j\omega) &= \overbrace{V_{\mathrm{re,ge}}(-j\omega)}^{\text{gerade}} + j\,\overbrace{V_{\mathrm{im,un}}(-j\omega)}^{\text{ungerade}} \\ &= V_{\mathrm{re,ge}}(j\omega) - j\,V_{\mathrm{im,un}}(j\omega) \\ &= V^*(j\omega). \end{aligned}$$

    … für diskrete Signale:

$$\begin{aligned} V(e^{-j\Omega}) &= \overbrace{V_{\mathrm{re,ge}}(e^{-j\Omega})}^{\text{gerade}} + j\,\overbrace{V_{\mathrm{im,un}}(e^{-j\Omega})}^{\text{ungerade}} \\ &= V_{\mathrm{re,ge}}(e^{j\Omega}) - j\,V_{\mathrm{im,un}}(e^{j\Omega}) \\ &= V^*(e^{j\Omega}). \end{aligned}$$

Daraus folgt: Die Spektren reeller Signale sind hermite-symmetrisch mit einem geraden Realteil und einem ungeraden Imaginärteil.

  - Außerdem kann – wie bei der Fourier-Reihe bzw. bei der Diskreten Fourier-Transformation – gezeigt werden, dass
    - das ***Betragsspektrum*** $|V(...)|$ eine gerade Funktion in ω bzw. Ω ist und dass
    - das ***Phasenspektrum*** $\arg\{V(...)\}$ eine ungerade Funktion in ω bzw. Ω ist.

Symmetriebeziehungen zwischen Signal- und Spektralkomponenten – Teil 5:

- Weiterhin können aus den Symmetriebeziehungen (aber auch aus den Transformationsgleichungen) weitere nützliche Beziehungen hergeleitet werden. Diese Beziehungen gelten allgemein für komplexe Signale

$$v(\ldots) \in \mathbb{C}.$$

… für kontinuierliche Signale gilt:

$$\begin{aligned} v(-t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\; V(-j\omega), \\ v^*(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\; V^*(-j\omega), \\ v^*(-t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\; V^*(j\omega). \end{aligned}$$

… für diskrete Signale gilt:

$$\begin{aligned} v(-n) &\circ\!\!-\!\!\bullet\; V(e^{-j\Omega}), \\ v^*(n) &\circ\!\!-\!\!\bullet\; V^*(e^{-j\Omega}), \\ v^*(-n) &\circ\!\!-\!\!\bullet\; V^*(e^{j\Omega}). \end{aligned}$$

Eigenschaften und Sätze – Teil 16

Differentiation und Differenzbildung – Teil 1:

- Für kontinuierliche Signale:

Gegeben:

$$V(j\omega) = \mathcal{F}\{v(t)\}.$$

Hierzu wird die Ableitung gemäß

$$v_1(t) = \dot{v}(t) = \frac{d}{dt} v(t)$$

definiert. ***Gesucht*** ist nun die zugehörige Fourier-Transformation (in Abhängigkeit von $V(j\omega)$):

$$\begin{aligned} v_1(t) &= \frac{d}{dt} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\omega=-\infty}^{\infty} V(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\omega=-\infty}^{\infty} \big[V(j\omega)\, j\omega\big]\, e^{j\omega t}\, d\omega \\ &= \mathcal{F}^{-1}\Big\{V(j\omega)\, j\omega\Big\}. \end{aligned}$$

- Für diskrete Signale:

Gegeben:

$$V(e^{j\Omega}) = \mathcal{F}\{v(n)\}.$$

Hierzu wird eine Signaldifferenz gemäß

$$v_1(n) = v(n) - v(n-1)$$

definiert. ***Gesucht*** ist nun die zugehörige Fourier-Transformation (in Abhängigkeit von $V(e^{j\Omega})$):

$$\begin{aligned} V_1(e^{j\Omega}) &= \mathcal{F}\{v(n)\} - \mathcal{F}\{v(n-1)\} \\ &= \mathcal{F}\{v(n)\} - e^{-j\Omega}\, \mathcal{F}\{v(n)\} \\ &= V(e^{j\Omega})\, \big[1 - e^{-j\Omega}\big]. \end{aligned}$$

Eigenschaften und Sätze – Teil 17

Differentiation und Differenzbildung – Teil 2:

- Für kontinuierliche Signale:

  Zusammengefasst ergibt sich:

$$\frac{d}{dt}\, v(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, V(j\omega)\, j\omega.$$

- Für diskrete Signale:

  Zusammengefasst ergibt sich:

$$v(n) - v(n-1) \circ\!\!-\!\!\bullet\, V(e^{j\Omega})\left[1 - e^{-j\Omega}\right].$$

- Für die Differenzbildung ergibt sich zunächst keine direkte Ähnlichkeit zur Differentiation. Man kann aber folgende Umformung anwenden:

$$\begin{aligned} v(n) - v(n-1) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad & V(e^{j\Omega})\left[1 - e^{-j\Omega}\right] \\ = \; & V(e^{j\Omega})\, e^{-j\frac{\Omega}{2}} \left[e^{j\frac{\Omega}{2}} - e^{-j\frac{\Omega}{2}}\right] \\ = \; & V(e^{j\Omega})\, e^{-j\frac{\Omega}{2}} \underbrace{\left[e^{j\frac{\Omega}{2}} - e^{-j\frac{\Omega}{2}}\right]}_{2j\sin(\frac{\Omega}{2})} \\ = \; & V(e^{j\Omega})\, 2j \sin\left(\frac{\Omega}{2}\right) e^{-j\frac{\Omega}{2}}. \end{aligned}$$

Differentiation und Differenzbildung – Teil 3:

- Gilt nun außerdem $\Omega \ll 1$, d.h. man betrachtet sehr niedrige Frequenzen, dann kann im Diskreten folgende Näherung angewendet werden:

$$v(n) - v(n-1) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad V(e^{j\Omega})\, 2j \sin\left(\frac{\Omega}{2}\right) e^{-j\frac{\Omega}{2}}$$

… Einsetzen der Näherungen $\sin(x) \approx x$ ***bzw.*** $e^{jx} \approx 1$ ***für*** $x \ll 1$ *…*

$$\approx \; V(e^{j\Omega})\, 2j\, \frac{\Omega}{2}\, 1$$

… Vereinfachen liefert …

$$\approx \; V(e^{j\Omega})\, j\Omega.$$

Das heißt: Für niedrige Frequenzen ist die Differenzbildung eine Näherung der Differentiation!

Verständnisfragen

Partnerarbeit:

Versuchen Sie in Partnerarbeit folgende Fragen zu beantworten:

- Welche Eigenschaft gilt im Spektralbereich, wenn Sie bei einem reellwertigen Signal die Zeitachse umdrehen ($v(-t) \in \mathbb{R}$)?

  ....

  ....

- Kennen Sie Anwendungsfälle, für welche das o.g. Verhalten wichtig ist?

  ....

  ....

- Was bewirkt das (zeitliche) Ableiten eines Signals im Fourier-Bereich?

  ....

  ....

Eigenschaften und Sätze – Teil 19

Differentiation im Spektrum – Teil 1:

- Für kontinuierliche Signale:

Gegeben:

$$V(j\omega) \;=\; \mathcal{F}\big\{v(t)\big\}.$$

Hierzu wird die spektrale Ableitung gemäß

$$V_1(j\omega) \;=\; \frac{d}{d\omega}\,V(j\omega)$$

definiert. *Gesucht* ist nun die zugehörige inverse Fourier-Transformation (in Abhängigkeit von $v(t)$):

$$\begin{aligned} V_1(j\omega) \;&=\; \frac{d}{d\omega}\int\limits_{t=-\infty}^{\infty} v(t)\,e^{-j\omega t}\,dt \\ &=\; \int\limits_{t=-\infty}^{\infty} \big[v(t)\,(-jt)\big]\,e^{-j\omega t}\,dt \\ &=\; \mathcal{F}\big\{v(t)\,(-jt)\big\}. \end{aligned}$$

- Für diskrete Signale:

Gegeben:

$$V(e^{j\Omega}) \;=\; \mathcal{F}\big\{v(n)\big\}.$$

Hierzu wird eine spektrale Ableitung gemäß

$$V_1(e^{j\Omega}) \;=\; \frac{d}{d\Omega}\,V(e^{j\Omega})$$

definiert. *Gesucht* ist nun die zugehörige inverse Fourier-Transformation

(in Abhängigkeit von $v(n)$):

$$\begin{aligned} V_1(e^{j\Omega}) \;&=\; \frac{d}{d\Omega}\sum_{n=-\infty}^{\infty} v(n)\,e^{-j\Omega n} \\ &=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} \big[v(n)\,(-jn)\big]\,e^{-j\Omega n} \\ &=\; \mathcal{F}\big\{v(n)\,(-jn)\big\}. \end{aligned}$$

Eigenschaften und Sätze – Teil 20

Differentiation im Spektrum – Teil 2:

- Für kontinuierliche Signale:

  Zusammengefasst ergibt sich:

$$\frac{d}{d\omega} V(j\omega) \bullet\!\!-\!\!\circ\; v(t)\,(-jt).$$

- Für diskrete Signale:

  Zusammengefasst ergibt sich:

$$\frac{d}{d\Omega} V(e^{j\Omega}) \bullet\!\!-\!\!\circ\; v(n)\,(-jn).$$

- Hier ist nun die ***Symmetrie*** zwischen kontinuierlichen und diskreten Signalen offensichtlich.
- Für Fourier-Reihen und diskrete Fourier-Transformation lassen sich ***spektrale Differenzwerte*** $\Delta c_\mu = c_\mu - c_{\mu-1}$ bzw. $\Delta V_M(\mu) = V_M(\mu) - V_M(\mu-1)$ betrachten und ähnliche Ergebnisse herleiten. Diese Zusammenhänge sind aber weniger wichtig.

Eigenschaften und Sätze – Teil 21

Integration und Summation – Teil 1:

- Für kontinuierliche Signale:

  Gegeben:

  $$V(j\omega) \;=\; \mathcal{F}\{v(t)\}.$$

  Hierzu wird eine Integration gemäß

  $$v_1(t) \;=\; \int\limits_{\tau=-\infty}^{t} v(\tau)\,d\tau$$

  definiert (Bauelement „Integrierer“).
  Gesucht ist nun die zugehörige Fourier-Transformation (in Abhängigkeit von $V(j\omega)$).

- Für diskrete Signale:

  Gegeben:

  $$V(e^{j\Omega}) \;=\; \mathcal{F}\{v(n)\}.$$

  Hierzu wird eine Summation gemäß

  $$v_1(n) \;=\; \sum_{\kappa=-\infty}^{n} v(\kappa)$$

  definiert (Bauelement „Akkumulator“).
  Gesucht ist nun die zugehörige Fourier-Transformation (in Abhängigkeit von $V(e^{j\Omega})$):

Folgendes wird dazu als bekannt vorausgesetzt:

Die ***Integration ist die „Umkehrung“ der Differentiation***, d.h.

$$\frac{d}{dt}\,v_1(t) \;=\; \frac{d}{dt}\int\limits_{\tau=-\infty}^{t} v(\tau)\,d\tau \;=\; v(t).$$

Die ***Summation ist die „Umkehrung“ der Differenzbildung***, d.h.

$$v_1(n) - v_1(n-1) = \sum_{\kappa=-\infty}^{n} v(\kappa) - \sum_{\kappa=-\infty}^{n-1} v(\kappa) = v(n).$$

Eigenschaften und Sätze – Teil 22

Integration und Summation – Teil 2:

- Daraus ergibt sich für kontinuierliche Signale:

$$\frac{d}{dt}\, v_1(t) \;=\; v(t).$$

$$(j\omega)\, V_1(j\omega) \;=\; V(j\omega).$$

Zusammengefasst ergibt sich:

$$\mathcal{F}\left\{ \int\limits_{\tau=-\infty}^{t} v(\tau)\, d\tau \right\} \;=\; \frac{V(j\omega)}{j\omega}.$$

- Für diskrete Signale:

$$v_1(n) - v_1(n-1) \;=\; v(n).$$

$$V_1(e^{j\Omega}) - e^{-j\Omega}\, V_1(e^{j\Omega}) \;=\; V(e^{j\Omega}).$$

Zusammengefasst ergibt sich:

$$\mathcal{F}\left\{ \sum_{\kappa=-\infty}^{n} v(\kappa) \right\} \;=\; \frac{V(e^{j\Omega})}{1 - e^{-j\Omega}}.$$

Integration und Summation – Teil 3:

- Gilt nun außerdem $\Omega \ll 1$, d.h. man betrachtet sehr niedrige Frequenzen, dann kann im Diskreten folgende Näherung angewendet werden:

$$v_1(n) = \sum_{\kappa=-\infty}^{n} v(\kappa) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{V(e^{j\Omega})}{1-e^{j\Omega}}$$

… Umformen analog zur Differentiation …

$$= \frac{V(e^{j\Omega})}{2j\sin(\frac{\Omega}{2})}\, e^{j\frac{\Omega}{2}}$$

… Einsetzen der Näherungen $\sin(x) \approx x$ ***bzw.*** $e^{jx} \approx 1$ ***für*** $x \ll 1$ ***…***

$$\approx \frac{V(e^{j\Omega})}{j\Omega}.$$

Das heißt: Für niedrige Frequenzen stellt die Summation eine Näherung der Integration dar (nach der „Rechteck-Regel“)!

Eigenschaften und Sätze – Teil 24

Integration und Summation – Teil 4:

- Probleme bei den bisherigen Ergebnissen:
  - Für kontinuierliche Signale ergibt sich:

$$V_1(j\omega)\Big|_{\omega\to 0} = \frac{V(0)}{0}.$$

Daraus ergibt sich die Mindest-anforderung

$$V(0) = 0.$$

Dieser Wert bestimmt sich gemäß

$$\begin{aligned} V(0) &= \int\limits_{t=-\infty}^{\infty} v(t)\, e^{-j\,0\,t}\, dt \\ &= \int\limits_{t=-\infty}^{\infty} v(t)\, dt \\ &= v_1(\infty). \end{aligned}$$

  - Für diskrete Signale ergibt sich:

$$V_1(e^{\Omega})\Big|_{\Omega\to 0} = \frac{V(e^0)}{1-1} = \frac{V(1)}{0}.$$

Daraus ergibt sich die Mindest-anforderung

$$V(1) = 0.$$

Dieser Wert bestimmt sich gemäß

$$\begin{aligned} V(1) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} v(n)\, e^{-j\,0\,n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} v(n) \\ &= v_1(\infty). \end{aligned}$$

Eigenschaften und Sätze – Teil 25

Integration und Summation – Teil 5:

- Da $v_1(...)$ transformiert werden soll, müssen auch die Existenzbedingungen für die zugehörigen Spektren $V_1(...)$ gelten, d.h.
  - für kontinuierliche Signale muss $|v_1(t)|$ „***integrierbar***“ sein.

    Damit muss $|v_1(t)|$ auch für $t \to \infty$ auf 0 abfallen.
  - für diskrete Signale muss $|v_1(n)|$ „***summierbar***“ sein.

    Damit muss $|v_1(n)|$ auch für $n \to \infty$ auf 0 abfallen.

… damit gilt dann auch:

$$V(0) \;=\; 0.$$

$$V(1) \;=\; 0.$$

Eigenschaften und Sätze – Teil 26

Faltung und Faltungssätze – Teil 1:

Die ***lineare Faltung*** zweier Signale liefert das ***Faltungsprodukt***. Dieses ist …

- … für kontinuierliche Signale wie folgt definiert:

$$f(t) \;=\; \int\limits_{\tau=-\infty}^{\infty} v_1(\tau)\, v_2(t-\tau)\, d\tau.$$

Das Faltungsergebnis hängt ab von t!

- … für diskrete Signale wie folgt definiert:

$$f(n) \;=\; \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} v_1(\kappa)\, v_2(n-\kappa).$$

Das Faltungsergebnis hängt ab von n!

Zur Bedeutung:

- Kontinuierliche und diskrete „Filter“ sind wichtige ***Werkzeuge*** in der Elektro und Informationstechnik.
  Sie werden z.B. zur Unterdrückung von ungewünschten bzw. störenden Signalanteilen, zur Anhebung von zu kleinen bzw. zur Absenkung von zu großen Spektralanteilen oder zur Klang-Färbung von Audiosignalen eingesetzt.
- Eine Filterung (mit linearen Systemen) wird als lineare Faltung bezeichnet.

Faltung und Faltungssätze – Teil 2:

Im folgenden werden wir uns mit den ***Faltungssätzen*** beschäftigen. Diese beschreiben …

- … für kontinuierliche Signale den Zusammenhang:

$$F(j\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} \iff V_{1,2}(j\omega) = \mathcal{F}\{v_{1,2}(t)\}.$$

- … für diskrete Signale den Zusammenhang:

$$F(e^{j\Omega}) = \mathcal{F}\{f(n)\} \iff V_{1,2}(e^{j\Omega}) = \mathcal{F}\{v_{1,2}(n)\}.$$

Das heißt, die Faltungssätze beschreiben die zur Faltung ***äquivalente Operation im Spektrum***.

- Für kontinuierliche Signale gilt:

$$F(j\omega) = \int\limits_{t=-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

… Einsetzen der Faltungsdefinition …

$$= \int\limits_{t=-\infty}^{\infty} \int\limits_{\tau=-\infty}^{\infty} v_1(\tau)\, v_2(t-\tau)\, e^{-j\omega t}\, d\tau\, dt.$$

- Für diskrete Signale gilt:

$$F(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\, e^{-j\Omega n}$$

… Einsetzen der Faltungsdefinition …

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} v_1(\kappa)\, v_2(n-\kappa)\, e^{-j\Omega n}.$$

Eigenschaften und Sätze – Teil 28

Faltung und Faltungssätze – Teil 3:

Fortsetzung …

- … für kontinuierliche Signale:

$$F(j\omega) = \int\limits_{t=-\infty}^{\infty} \int\limits_{\tau=-\infty}^{\infty} v_1(\tau)\, v_2(t-\tau)\, e^{-j\omega t}\, d\tau\, dt$$

… Einfügen von $1 = e^{jx}\, e^{-jx}$ ***…***

$$= \int\limits_{t=-\infty}^{\infty} \int\limits_{\tau=-\infty}^{\infty} v_1(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, v_2(t-\tau)\, e^{-j\omega(t-\tau)}\, d\tau\, dt$$

… Substituieren von $x = t - \tau, dx = dt$ ***…***

$$= \int\limits_{\tau=-\infty}^{\infty} v_1(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau \int\limits_{x=-\infty}^{\infty} v_2(x)\, e^{-j\omega x}\, dx$$

… Einsetzen der Fourier-Transformation …

$$= V_1(j\omega)\, V_2(j\omega).$$

- … für diskrete Signale:

$$F(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} v_1(\kappa)\, v_2(n-\kappa)\, e^{-j\Omega n}.$$

… Einfügen von $1 = e^{jx}\, e^{-jx}$ ***…***

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} v_1(\kappa)\, e^{-j\Omega\kappa}\, v_2(n-\kappa)\, e^{-j\Omega(n-\kappa)}$$

… Substituieren von $k = n - \kappa$ ***…***

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_1(\kappa)\, e^{-j\Omega\kappa} \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_2(k)\, e^{-j\Omega k}$$

… Einsetzen der Fourier-Transformation …

$$= V_1(e^{j\Omega})\, V_2(e^{j\Omega})$$

Eigenschaften und Sätze – Teil 29

Faltung und Faltungssätze – Teil 4:

Mit der üblichen kurzen Schreibweise $f(...) = v_1(...) * v_2(...)$ für die Faltung gilt damit zusammengefasst …

- … für kontinuierliche Signale:

$$\mathcal{F}\{v_1(t) * v_2(t)\} = V_1(j\omega)\, V_2(j\omega).$$

- … für diskrete Signale:

$$\mathcal{F}\{v_1(n) * v_2(n)\} = V_1(e^{j\Omega})\, V_2(e^{j\Omega}).$$

Dies wird als ***erster Faltungssatz*** bezeichnet. Er besagt, dass eine Faltung im „Zeit“-Bereich einer Multiplikation im „Frequenz“-Bereich entspricht.

Die Definition der Faltung gilt (natürlich) nicht nur für „Zeit“-Funktionen $f(t)$ bzw. $v_{1,2}(t)$. Es können auch andere Funktionen kontinuierlicher Variablen miteinander gefaltet werden – z.B. zwei Spektralfunktionen $V_1(j\omega)$ und $V_2(j\omega)$.
Dies wird im Folgenden behandelt.

Ein kurzer Blick über den Ozean nach Stanford

Videomitschnitt aus der Standford-Universität (Kalifornien):

Verständnisfragen

Partnerarbeit:

Versuchen Sie in Partnerarbeit folgende Fragen zu beantworten:

- Was kommt heraus, wenn Sie zwei Rechteckfolgen

$$v(n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } 0 \le n < 5, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

  miteinander falten ($v(n) * v(n)$)?

  ....

  ....

- Welche Frequenzbereichsoperation entspricht einer Zeitbereichsfaltungsoperation?

  ....

  ....

- Was müsste für diskrete Folgen gelten (zumindest für eine) damit eine diskrete Faltung einfach (mit wenigen Operationen) zu realisieren ist?

  ....

  ....

Eigenschaften und Sätze – Teil 30

Faltung und Faltungssätze – Teil 5:

Nun sei eine Faltung der Spektren zweier kontinuierlicher Signale

$$V_1(j\omega) = \mathcal{F}\{v_1(t)\}, \; V_2(j\omega) = \mathcal{F}\{v_2(t)\},$$

gegeben:

$$C(j\omega) = \int\limits_{\eta=-\infty}^{\infty} V_1(j\eta)\, V_2\big(j(\omega-\eta)\big)\, d\eta = V_1(j\omega) * V_2(j\omega).$$

Gesucht ist nun, wie die Rücktransformierte $c(t) = \mathcal{F}^{-1}\{C(j\omega)\}$ des Faltungsergebnisses von den kontinuierlichen Signalen $v_1(t)$ und $v_2(t)$ abhängt:

$$c(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\omega=-\infty}^{\infty} C(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

... Einsetzen der Faltungsdefinition und Erweitern mit $1 = e^{j\eta t}\, e^{-j\eta t}$ *...*

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\omega=-\infty}^{\infty} \int\limits_{\eta=-\infty}^{\infty} V_1(j\eta)\, e^{j\eta t}\, V_2\big(j(\omega-\eta)\big)\, e^{j(\omega-\eta)t}\, d\eta\, d\omega.$$

Faltung und Faltungssätze – Teil 6:

Fortsetzung:

$$c(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\omega=-\infty}^{\infty} \int\limits_{\eta=-\infty}^{\infty} V_1(j\eta)\, e^{j\eta t}\, V_2\big(j(\omega-\eta)\big)\, e^{j(\omega-\eta)t}\, d\eta\, d\omega.$$

… Substituieren von** $x = \omega - \eta,\ d\omega = dx$ **…

$$= 2\pi\, \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\eta=-\infty}^{\infty} V_1(j\eta)\, e^{j\eta t}\, d\eta\ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{x=-\infty}^{\infty} V_2(jx)\, e^{jxt}\, dx$$

… Einsetzen der Fourier-Transformation …

$$= 2\pi\, v_1(t)\, v_2(t).$$

Zusammengefasst ergibt sich:

$$\mathcal{F}^{-1}\big\{V_1(j\omega) * V_2(j\omega)\big\} = 2\pi\, v_1(t)\, v_2(t).$$

Dies wird als ***zweiter Faltungssatz*** bezeichnet. Er besagt, dass eine Faltung im „Frequenz-Bereich einer Multiplikation (mit einer zusätzlichen Gewichtung) im „Zeitbereich“ entspricht.

Faltung und Faltungssätze – Teil 7:

Abschließend sei nun noch eine Faltung der Spektren zweier diskreter Signale

$$V_1(e^{j\Omega}) = \mathcal{F}\{v_1(n)\},\; V_2(e^{j\Omega}) = \mathcal{F}\{v_2(n)\},$$

gegeben:

Integral über eine beliebiges Intervall der Länge 2π ***!***

$$C(e^{j\Omega}) = \int\limits_{\eta=0}^{2\pi} V_1\big(e^{j\eta}\big)\, V_2\big(e^{j(\Omega-\eta)}\big)\, d\eta = V_1(e^{j\Omega}) \circledast V_2(e^{j\Omega}).$$

Dies wird als „zyklische Faltung" bezeichnet!

Gesucht ist nun, wie die Rücktransformierte $c(n) = \mathcal{F}^{-1}\{C(e^{j\Omega})\}$ des Faltungsergebnisses von den diskreten Signalen $v_1(n)$ und $v_2(n)$ abhängt.

Zu beachten ist hierbei, dass die Spektren diskreter Signale, also sowohl $V_1(e^{j\Omega})$ ***und*** $V_2(e^{j\Omega})$ ***als auch*** $C(e^{j\Omega})$ ***stets*** 2π***–periodisch sind!***

Eigenschaften und Sätze – Teil 33

Faltung und Faltungssätze – Teil 8:

Man berechnet nun auf ähnliche Weise wie bei der Faltung der Spektren von kontinuierlichen Signalen die Rücktransformierte des zyklischen Faltungsprodukts und erhält:

$$\mathcal{F}^{-1}\{V_1(e^{j\Omega}) \circledast V_2(e^{j\Omega})\} \;=\; 2\pi\, v_1(n)\, v_2(n).$$

Ergänzungen:

Die zyklische Faltung lässt sich auch anwenden auf

- kontinuierliche, periodische Signale $v_{1,2}(t) \;=\; v_{1,2}(t+\lambda T)$,
- diskrete, periodische Signale $v_{1,2}(n) \;=\; v_{1,2}(n+\lambda M)$, sowie
- diskrete, periodische Spektren $V_{1,2\,M}(\mu) \;=\; V_{1,2\,M}(\mu+\lambda M)$

und die zugehörigen (inversen) Transformierten können dann auch wieder mit den entsprechenden Faltungssätzen beschrieben werden.

Eigenschaften und Sätze – Teil 34

Faltung und Faltungssätze – Teil 9:

Die Herleitung der entsprechenden Rücktransformierten geht wieder analog zur Bestimmung der Rücktransformierten der linearen Faltung. Man benötigt hierfür folgende Eigenschaften bzw. Definitionen:

- die Transformationsbeziehungen für die Fourier-Reihe und die Diskrete Fourier-Transformation,
- die Ausblend- und die Flächeneigenschaft des Dirac-Impulses,
- die Orthogonalitätsbeziehungen und die
- Beispiel-Fourier-Reihe aus dem ersten Teil der Folien über Spektraldarstellungen.

Als Ergebnisse erhält man …

- für kontinuierliche Signale:

$$v_{1,2}(t) = v_{1,2}(t+\lambda T),$$

$$v_1(t) \circledast v_2(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad T\, c_{1\,\mu}\, c_{2\,\mu},$$

$$c_{1\,\mu} * c_{2\,\mu} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad v_1(t)\, v_2(t).$$

- … für diskrete Signale:

$$v_{1,2}(n) = v_{1,2}(n+\lambda M),$$

$$v_1(n) \circledast v_2(n) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad V_{1\,M}(\mu)\, V_{2\,M}(\mu),$$

$$V_{1\,M}(\mu) \circledast V_{2\,M}(\mu) \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad M\, v_1(n)\, v_2(n).$$

Beispiele – Teil 1

Impulse – Teil 1:

- Für kontinuierliche Signale:

Gegeben:

$$v(t) \;=\; \delta_0(t).$$

Gesucht ist die zugehörige Fourier-Transformation:

$$\delta_0(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \Delta_0(j\omega) \;=\; \int\limits_{t=-\infty}^{\infty} \delta_0(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

… Ausnutzen der Ausblendeigenschaft …

$$= \int\limits_{t=-\infty}^{\infty} \delta_0(t)\, e^{-j\omega 0}\, dt$$

… Ausnutzen der Flächeneigenschaft …

$$= \int\limits_{t=-\infty}^{\infty} \delta_0(t)\, dt$$

$$\equiv \;\; 1\,\forall\,\omega.$$

- Für diskrete Signale:

Gegeben:

$$v(n) \;=\; \gamma_0(n).$$

Gesucht ist nun die zugehörige Fourier-Transformation:

$$\gamma_0(n) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \Gamma_0(e^{j\Omega}) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_0(n)\, e^{-j\Omega n}$$

… Ausnutzen der Ausblendeigenschaft …

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_0(n)\, e^{-j\Omega 0}$$

… Ausnutzen der Summeneigenschaft …

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_0(n)$$

$$\equiv \;\; 1\,\forall\,\Omega.$$

Impulse – Teil 2:

- Verallgemeinerung: ***Impuls in allgemeiner Lage***. Hierbei gilt …
  - … für kontinuierliche Signale:

    Gegeben:
    $$v(t) \;=\; \delta_0(t-t_0).$$
    Für die zugehörige Fourier-Transformation ergibt sich:
    $$\delta_0(t-t_0) \circ\!\!-\!\!\bullet\; e^{-j\omega t_0}.$$
  - … für diskrete Signale:

    Gegeben:
    $$v(n) \;=\; \gamma_0(n-n_0).$$
    Für die zugehörige Fourier-Transformation ergibt sich:
    $$\gamma_0(n-n_0) \circ\!\!-\!\!\bullet\; e^{-j\Omega n_0}.$$

Für die Herleitung kann der Verschiebungssatz angewendet werden!

- Offenbar gilt stets:

$$\Big|\mathcal{F}\{\delta_0(t-t_0)\}\Big| \;=\; 1. \qquad\qquad \Big|\mathcal{F}\{\gamma_0(n-n_0)\}\Big| \;=\; 1.$$

- Der Impuls enthält Komponenten bei allen Frequenzen mit identischer Stärke. In Analogie zur Optik („weißes Licht“ weist alle Farben in gleicher Intensität auf) spricht man von einem „***weißen Signal***“.

Beispiele – Teil 3

Impulse – Teil 3:

- Weitere Verallgemeinerung: ***Summe von zwei verschobenen Impulsen***. Hierbei gilt …
  - … für kontinuierliche Signale:

    Gegeben:

    $$v(t) \;=\; \delta_0(t-t_0)+\delta_0(t+t_0).$$

    Für die zugehörige Fourier-Transformation ergibt sich:

    $$\begin{aligned}\delta_0(t-t_0)+\delta_0(t+t_0) & \\ \circ\!\!-\!\!\bullet\; & e^{-j\omega t_0}+e^{j\omega t_0} \\ = \; & 2\,\cos(\omega t_0).\end{aligned}$$

  - … für diskrete Signale:

    Gegeben:

    $$v(n) \;=\; \gamma_0(n-n_0)+\gamma_0(n+n_0).$$

    Für die zugehörige Fourier-Transformation ergibt sich:

    $$\begin{aligned}\gamma_0(n-n_0)+\gamma_0(n+n_0) & \\ \circ\!\!-\!\!\bullet\; & e^{-j\Omega n_0}+e^{j\Omega n_0} \\ = \; & 2\,\cos(\Omega n_0).\end{aligned}$$

Für die Herleitung wurde der Überlagerungssatz verwendet!

- Analog kann für das Spektrum der ***Differenz zweier verschobener Impulse*** bestimmt werden:
  - $\mathcal{F}\{\delta_0(t-t_0)-\delta_0(t+t_0)\} \;=\; -2j\sin(\omega t_0),$
  - $\mathcal{F}\{\gamma_0(n-n_0)-\gamma_0(n+n_0)\} \;=\; -2j\sin(\Omega n_0).$

Impulse – Teil 4:

- Nun werden die kontinuierlichen Zeit-Frequenz-Zusammenhänge umgekehrt. Gegeben sei ein ***impulsförmiges Spektrum***

$$V(j\omega) = \delta_0(\omega).$$

Spektrum mit Anteilen nur bei $\omega = 0$ ***!***

Hierzu ist nun das zugehörige Zeitsignal $v(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, V(j\omega)$ gesucht. Einsetzen in die Fourier-Transformationsgleichung ergibt:

$$v(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\omega=-\infty}^{\infty} \delta_0(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

… Ausnutzen der Ausblendeigenschaft …

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\omega=-\infty}^{\infty} \delta_0(\omega)\, e^{j0t}\, d\omega$$

… Ausnutzen der Flächeneigenschaft …

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\omega=-\infty}^{\infty} \delta_0(\omega)\, d\omega \equiv \frac{1}{2\pi}\, \forall\, t.$$

Beispiele – Teil 5

Impulse – Teil 5:

- Zusammengefasst ergibt sich:

$$\mathcal{F}^{-1}\{\delta_0(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}.$$

Wendet man den Modulationssatz an, so ergibt sich folgende ***Verallgemeinerung***

$$\mathcal{F}^{-1}\{\delta_0(\omega-\omega_0)\} = \frac{1}{2\pi}\,e^{j\omega_0 t} = \frac{1}{2\pi}\big[\cos(\omega_0 t) + j\,\sin(\omega_0 t)\big].$$

Spektrum mit Anteilen nur bei $\omega = \omega_0$ ***!***

Beispiele – Teil 6

Impulse – Teil 6:

- Analog zu den Betrachtungen im Zeitbereich gibt es folgende ***Impulssummen im Spektralbereich***:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}\Big\{2\pi\,\delta_0(\omega-\omega_0)\Big\} &= e^{j\omega_0 t}, \\
\mathcal{F}^{-1}\Big\{\pi\,\delta_0(\omega-\omega_0)+\pi\,\delta_0(\omega+\omega_0)\Big\} &= \frac{1}{2}\,e^{j\omega_0 t}+\frac{1}{2}\,e^{-j\omega_0 t} \;=\; \cos(\omega_0 t), \\
\mathcal{F}^{-1}\Big\{-j\pi\,\delta_0(\omega-\omega_0)+j\pi\,\delta_0(\omega+\omega_0)\Big\} &= -\frac{j}{2}\,e^{j\omega_0 t}+\frac{j}{2}\,e^{-j\omega_0 t} \;=\; \sin(\omega_0 t).
\end{aligned}$$

- Bemerkungen:
  - Die gerade beschriebenen Signale widersprechen den ***Existenzbedingungen*** für Fourier-Transformation. Die Integrale

$$\int_{t=-\infty}^{\infty}\big|e^{j\omega_0 t}\big|\,dt,\quad \int_{t=-\infty}^{\infty}\big|\cos(\omega_0 t)\big|\,dt \quad \text{und} \quad \int_{t=-\infty}^{\infty}\big|\sin(\omega_0 t)\big|\,dt$$

sind nicht angebbar, sie streben gegen ∞ !

Beispiele – Teil 7

Impulse – Teil 7:

- Bemerkungen (Fortsetzung):

    - Tatsächlich liefern die angegebenen Transformationspaare ja auch keine Transformierten mit ***endlichen*** Werten: $\delta_0(x)$ ist ∞ hoch. D.h. für diese Signale existieren Transformierte nur durch Zulassen einer „***verallgemeinerten Funktionen-Klasse***“ (der Distribution $\delta_0(...)$).

    - Für die zuvor genannten Signale lassen sich (fast triviale!) Fourier-Reihen sehr einfach angeben:

$$1 = v(t) \longrightarrow v(t) = c_0\, e^{j0t} \quad \text{mit } c_0 = 1,\, c_\mu = 0\; \forall\, \mu \neq 0,$$

$$e^{j\omega_0 t} = v(t) \longrightarrow v(t) = c_1\, e^{j\omega_0 t} \quad \text{mit } c_1 = 1,\, c_\mu = 0\; \forall\, \mu \neq 1,$$

$$\cos(\omega_0 t) = v(t) \longrightarrow v(t) = c_1\, e^{j\omega_0 t} + c_{-1}\, e^{-j\omega_0 t} \quad \text{mit } c_1 = c_{-1} = \frac{1}{2},\, c_\mu = 0\; \forall\, |\mu| \neq 1,$$

$$\sin(\omega_0 t) = v(t) \longrightarrow v(t) = c_1\, e^{j\omega_0 t} + c_{-1}\, e^{-j\omega_0 t} \quad \text{mit } c_1 = -c_{-1} = \frac{1}{2j},\, c_\mu = 0\; \forall\, |\mu| \neq 1.$$

- Offenbar entsprechen die ***Fourier-Koeffizienten***, die in der vorherigen Folien aufgeführt waren, bis auf einen Faktor den ***Gewichten der Dirac-Anteile*** der Fourier-Transformation. Hier werden die „Linien“ mit den Werten lediglich dargestellt durch Impulse mit den Gewichten .

Verständnisfragen

Partnerarbeit:

Versuchen Sie in Partnerarbeit folgende Fragen zu beantworten:

- Erklären Sie den Unterschied zwischen einer linearen und einer zyklischen Faltung?

  ………

  ………

- Wie kann das Fourier-Spektrum eines Sinus- oder Cosinus-Signals beschrieben werden?

  ………

  ………

- Welche Frequenzen regt ein Dirac-Stoß an (wie sieht das Fourierspektrum eines Dirac-Stoßes aus)?

  ………

  ………

Beispiele – Teil 9

Allgemeine periodische kontinuierliche Signale – Teil 1:

- Kontinuierliche Signale mit der Eigenschaft

$$v(t+\lambda T) \;=\; v(t),\; \lambda \in \mathbb{Z},\; T \in \mathbb{R}^+$$

sind bekanntlich darstellbar mit Hilfe von ***Fourier-Reihen***:

$$v(t) \;=\; \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} c_\mu \, e^{j\mu \frac{2\pi}{T} t}.$$

Die darin enthaltenen Exponentialfunktionen können gemäß den Überlegungen der vergangenen Folien gemäß

$$\mathcal{F}\left\{ e^{j\mu \frac{2\pi}{T} t} \right\} \;=\; 2\pi \, \delta_0(\omega - \mu \frac{2\pi}{T})$$

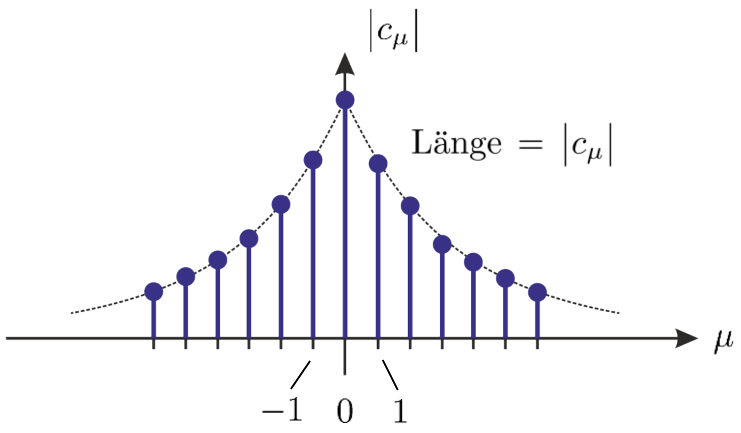
transformiert werden. Mit dem Überlagerungssatz folgt damit:

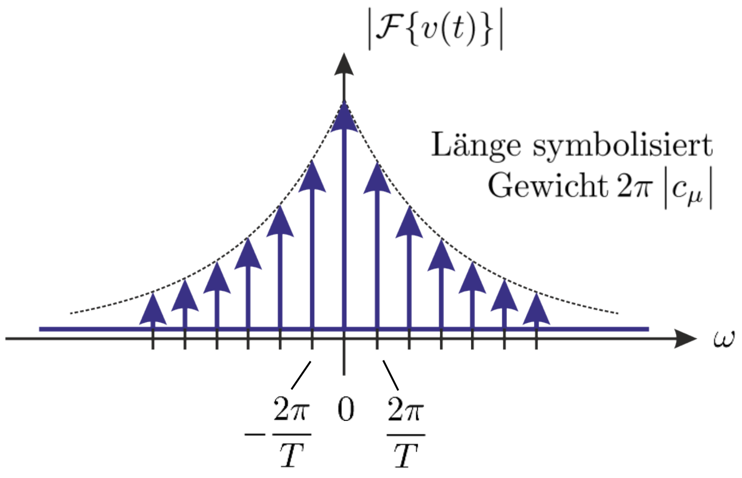
$$\mathcal{F}\left\{ v(t) \right\} \;=\; 2\pi \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} c_\mu \, \delta_0(\omega - \mu \frac{2\pi}{T}).$$

Beispiele – Teil 10

Allgemeine periodische kontinuierliche Signale – Teil 2:

- Das Fourierspektrum entspricht lediglich einer anderen Interpretation des Linienspektrums, welches aus der Fourier-Reihe hervorgegangen ist.





Beispiele – Teil 11

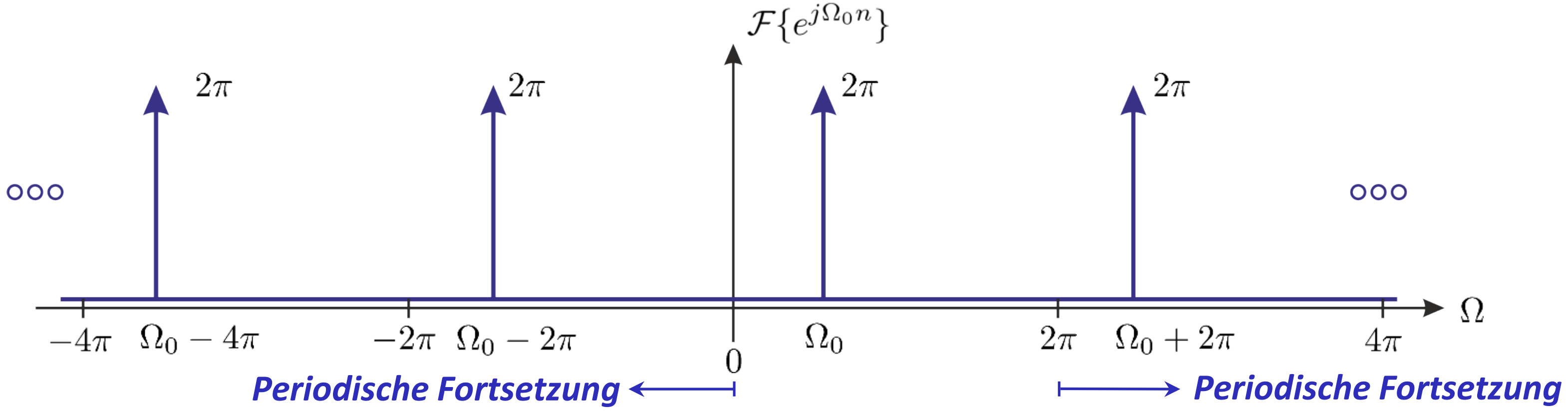
Harmonische Exponentialfolge – Teil 1:

- Eine plausible Überlegung – in Anlehnung an die zuvor betrachteten kontinuierlichen Signale – würde zu folgendem Transformationspaar führen:

$$\mathcal{F}\Big\{e^{j\Omega_0 n}\Big\} \overset{?}{=} 2\pi\,\delta_0(\Omega - \Omega_0).$$

Allerdings ist nun ebenfalls bekannt, dass die Spektren diskreter Signale stets ***periodisch mit der Periode*** 2π sind, d.h. das Spektrum einer diskreten harmonischen Exponentialfolge lautet

$$\mathcal{F}\Big\{e^{j\Omega_0 n}\Big\} = \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} 2\pi\,\delta_0(\Omega - \Omega_0 + \lambda 2\pi).$$



Beispiele – Teil 12

Harmonische Exponentialfolge – Teil 2:

- Entsprechend folgt für die Cosinus-Folge:

$$\mathcal{F}\Big\{\cos(\Omega_0 n)\Big\} = \pi \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \delta_0(\Omega - \Omega_0 + \lambda 2\pi) + \delta_0(\Omega + \Omega_0 + \lambda 2\pi).$$

- Und für die Sinusfolge gilt:

$$\mathcal{F}\Big\{\sin(\Omega_0 n)\Big\} = -j\pi \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \delta_0(\Omega - \Omega_0 + \lambda 2\pi) - \delta_0(\Omega + \Omega_0 + \lambda 2\pi).$$

Die Linien bei** Ω_0 **(für Exponentialfolgen) bzw. bei** $\pm\Omega_0$ **(für Sinus- und Cosinusfolgen) werden stets periodisch fortgesetzt (mit Periode** 2π **)!

Beispiele – Teil 13

Periodische Folgen:

- Analog zur Verwendung der Fourier-Reihe bei kontinuierlichen periodischen Signalen kann für ***diskrete periodische Signale***

$$v(n) \;=\; v(n+\lambda M) \;\; \text{mit } \lambda \in \mathbb{Z},\, M \in \mathbb{N}$$

das Ergebnis einer zugehörigen Diskrete Fourier-Transformation

$$v(n) \;=\; \frac{1}{M} \sum_{\mu=0}^{M-1} V_M(\mu)\, e^{j\mu\frac{2\pi}{M}n}$$

verwendet werden. Durch Einsetzen der Fourier-Transformation von harmonischen Exponentialfolgen ergibt sich:

$$\mathcal{F}\{v(n)\} \;=\; \frac{2\pi}{M} \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{M-1} V_M(\mu)\, \delta_0\Big(\Omega - \mu\frac{2\pi}{M} + \lambda 2\pi\Big).$$

Beispiele – Teil 14

Periodische Impulskämme – Teil 1:

- Für kontinuierliche Signale:

Gegeben:

$$v(t) \;=\; T \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \delta_0(t-\lambda T).$$

Hierzu ist die zugehörige Fourier-Reihe bekannt. Für die Koeffizientenberechnung ergab sich dabei:

$$c_\mu \;=\; 1, \;\; \forall\, \mu.$$

Das heißt, es gilt folgende Reihenentwicklung:

$$\sum_{\mu=-\infty}^{\infty} e^{j\mu\frac{2\pi}{T}t} \;=\; T \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \delta_0(t-\lambda T).$$

- Für diskrete Signale:

Gegeben:

$$v(n) \;=\; \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \gamma_0(n-\lambda M).$$

Hierzu ist die zugehörige Diskrete Fourier-Transformation bekannt. Für die Koeffizientenberechnung ergab sich dabei:

$$V_M(\mu) \;=\; 1, \;\; \forall\, \mu.$$

Das heißt, es gilt folgenden Zusammenhang:

$$\frac{1}{M} \sum_{\mu=0}^{M-1} e^{j\mu\frac{2\pi}{M}n} \;=\; \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \gamma_0(n-\lambda M).$$

Periodische Impulskämme – Teil 2:

- Für kontinuierliche Signale:

  Wendet man auf diese Darstellung die Fourier-Transformation an, so ergibt sich:

$$\mathcal{F}\left\{T \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \delta_0(t-\lambda T)\right\}$$

$$= \mathcal{F}\left\{\sum_{\mu=-\infty}^{\infty} e^{j\mu\frac{2\pi}{T}t}\right\}$$

$$= 2\pi \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \delta_0\left(\omega - \mu\frac{2\pi}{T}\right).$$

- Für diskrete Signale:

  Wendet man auf diese Darstellung die Fourier-Transformation an, so ergibt sich:

$$\mathcal{F}\left\{\sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \gamma_0(n-\lambda M)\right\}$$

$$= \mathcal{F}\left\{\frac{1}{M}\sum_{\mu=0}^{M-1} e^{j\mu\frac{2\pi}{M}n}\right\}$$

$$= 2\pi \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{M-1} \delta_0\left(\Omega - \mu\frac{2\pi}{M} - \lambda 2\pi\right)$$

$$= 2\pi \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \delta_0\left(\Omega - \mu\frac{2\pi}{M}\right).$$

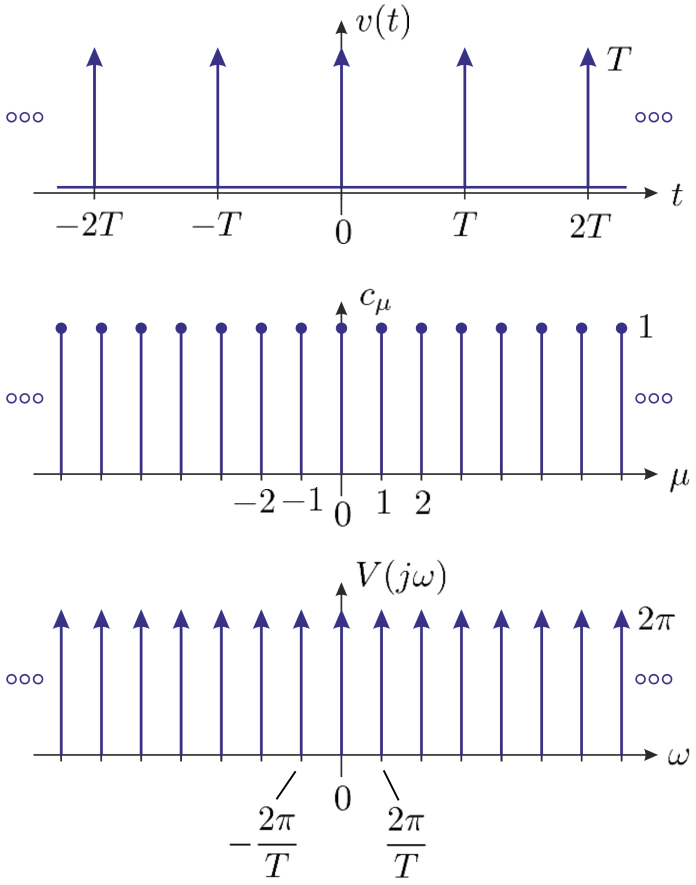
… Offenbar ist die Fourier-Transformierte eines Impulskamms wieder ein Impulskamm! …

… Dieser Zusammenhang spielt eine wichtige Rolle bei der Beschreibung der Signalabtastung (AD-Wandlung) …

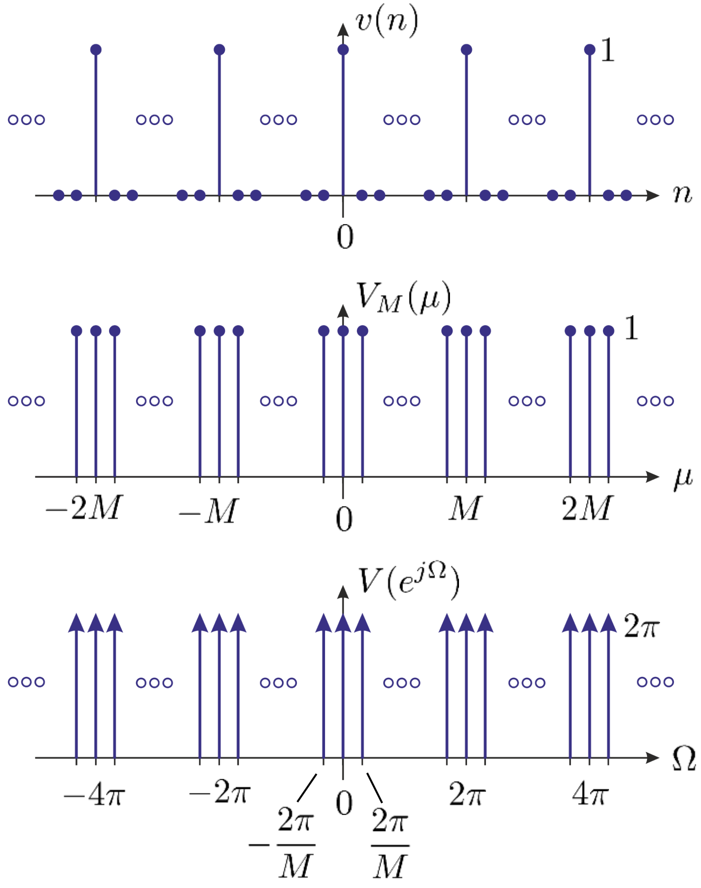
Beispiele – Teil 16

Periodische Impulskämme – Teil 3:

- Für kontinuierliche Signale:



- Für diskrete Signale:



Abschließende Zusammenfassung

- Signale und Systeme – Einführung
- Signale
- Spektraldarstellungen determinierter Signale
    - Fourier-Reihe und Diskrete Fourier-Transformation
    - ***Fourier-Transformation***
        - Definition und Begriffsklärung
        - Periodizitäten
        - Fehlerbetrachtung, Bessel-Ungleichung und Parseval'sche Gleichung
        - Existenzbedingungen
        - Eigenschaften und Sätze
        - Beispiele
    - Laplace- und z-Transformation
- Lineare Systeme
- Modulation