Christian-Albrechts-Universität zu Kiel

Signale und Systeme – Signale

Gerhard Schmidt

Christian-Albrechts-Universität zu Kiel
Technische Fakultät
Elektrotechnik und Informationstechnik
Digitale Signalverarbeitung und Systemtheorie

Gesamtübersicht – Teil 1

- Signale und Systeme – Einführung
  - Einführung und Begriffsklärung
  - Signale
  - Systeme
- Signale
  - Elementarsignale
  - Reaktion linearer Systeme auf Elementarsignale
  - Signalzerlegung in Elementarsignale
- Spektraldarstellungen determinierter Signale
  - Fourier-Reihe, diskrete Fourier-Transformation (DFT)
  - Fourier-Transformation
  - Laplace- und z-Transformation

Gesamtübersicht – Teil 2

- Lineare Systeme
  - Reaktionen auf Elementarsignale
  - Reaktionen auf beliebige Signale
  - Zusammenhänge zwischen Systemkenngrößen
  - Stabilität linearer Systeme
  - Gebrochen-rationale Übertragungsfunktionen
- Modulation
  - Grundlagen
  - Lineare Modulation- und Demodulationsverfahren
  - Abtasttheorem

Übersicht des nächsten Abschnitts

Einleitung

Ziel:

Das Ziel der Einführung von sog. Elementarsignalen ist die Darstellung bzw. Zerlegung allgemeiner Signale mit Hilfe von Teilsignalen bestimmter (sinnvoller) ***Grundformen***, die für eine möglichst große Signalklasse passen.

Elementarsignale:

Der Begriff „Elementarsignal" soll hier (zunächst) für vereinfachende Repräsentationen realer Signalereignisse stehen.

Beispiele:

- Verhalten im ***Dauerbetrieb***:
  Konstante (bzw. als Verallgemeinerung: Schwingungen)
- Verhalten bei ***plötzlichen Änderungen***:
  Kurzer Stoß, plötzlicher Sprung oder Anstieg

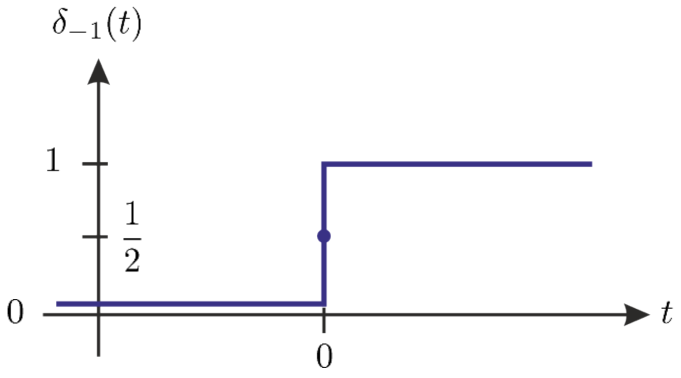
Sprung – Teil 1

Definition:

Kontinuierlich:

- Sprungfunktion

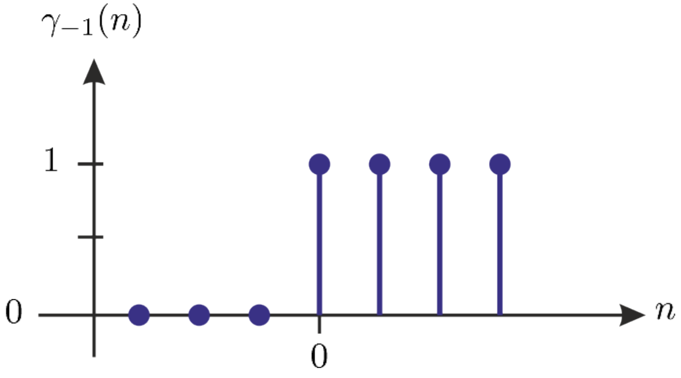
$$\delta_{-1}(t) = \begin{cases} 1, & \text{für } t > 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{für } t = 0, \\ 0, & \text{für } t < 0. \end{cases}$$



Diskret:

- Sprungfolge

$$\gamma_{-1}(n) = \begin{cases} 1, & \text{für } n \geq 0, \\ 0, & \text{für } n < 0. \end{cases}$$

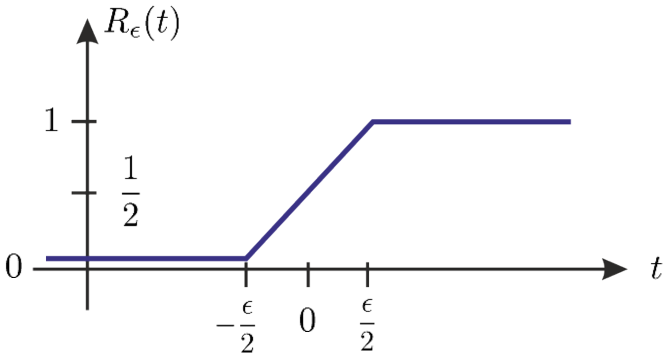


Sprung – Teil 2

Anmerkungen :

- „Physikalische“, reale Größen springen nicht, während Zahlenfolgen sehr wohl von Wert zu Wert Änderungen aufweisen. Man kann daher $\delta_{-1}(t)$ auch als Idealisierung eines realistischen, schnellen Übergangs verstehen.

  Beispiel:



$$\lim_{\epsilon \to 0} R_\epsilon(t) = \delta_{-1}(t)$$

Auch andere „realistischere“ Übergänge sind hier denkbar.

- Die Definition von oben besitzt Punktsymmetrie bezüglich (0, ½). Dies kann in machen Fällen hilfreich sein.
- Alternativ kann folgende Definition verwendet werden (Übergang nur in $t < 0$):

$$\delta_{-1}(t) = \begin{cases} 1, & \text{für } t \geq 0, \\ 0, & \text{für } t < 0. \end{cases}$$

Praktisch spielen die Unterschiede in den Definitionen keine Rolle.

- Für die Nachbildung von realen Signalen sind beide Definitionen gleichwertig.

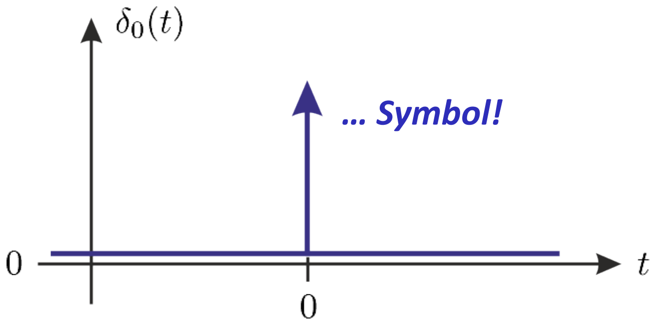
Impuls – Teil 1

Definition:

Kontinuierlich:

- „Dirac“-Stoß

$$\delta_0(t) = \begin{cases} \to \infty, & \text{für } t = 0, \\ 0, & \text{für } t \neq 0. \end{cases}$$

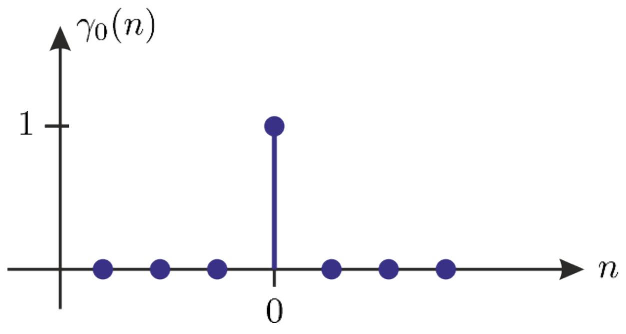


- Keine gewöhnliche Funktion! (Distributionen-Theorie)

Diskret:

- „Einheits-Impuls“

$$\gamma_0(n) = \begin{cases} 1, & \text{für } n = 0, \\ 0, & \text{für } n \neq 0. \end{cases}$$



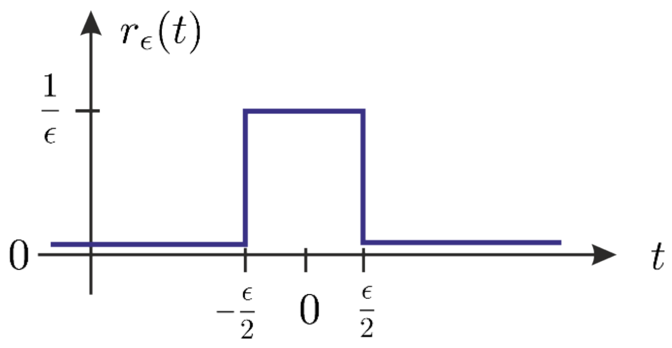
- Einfache Folge von unendlich vielen Nullen und einer Eins!

Anmerkungen zum (kontinuierlichen) „Dirac"-Impuls – Teil 1:

- (Verständliche) Herleitung zum Beispiel mittels des Grenzwertübergangs

$$\lim_{\epsilon \to 0} r_\epsilon(t) \;=\; \delta_0(t)$$

von folgender Funktion:



Hierbei tritt die sog. Flächeneigenschaft (Teil der Definition)

$$\int\limits_{t=-\infty}^{\infty} \delta_0(t)\,dt \;=\; 1$$

des Dirac-Impulses hervor:

$$\int\limits_{t=-\infty}^{\infty} r_\epsilon(t)\,dt \;=\; \epsilon\,\frac{1}{\epsilon} \;=\; 1.$$

- Hierbei gilt folgende Ableitungsbeziehung:

$$r_\epsilon(t) \;=\; \frac{d}{dt} R_\epsilon(t)\,.$$

Anmerkungen zum (kontinuierlichen) „Dirac"-Impuls – Teil 2:

- Im Grenzübergang gilt:

$$\delta_0(t) \;=\; \mathrm{D}\Big[\delta_{-1}(t)\Big].$$

„Derivierte" = verallgemeinerte Ableitung!

- Umgekehrt gilt dann aber eine „normale" Integration:

$$\delta_{-1}(t) = \int\limits_{\tau=-\infty}^{t} \delta_0(\tau)\, d\tau.$$

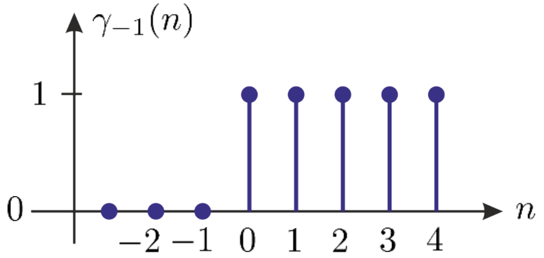
Impuls – Teil 4

Anmerkungen zur (diskreten) Impulsfolge:

- Statt der Ableitung bzw. Derivation wird im Diskreten eine Differenzbildung angewendet:

$$\gamma_{-1}(n) - \gamma_{-1}(n-1) \;=\; \gamma_0(n)$$

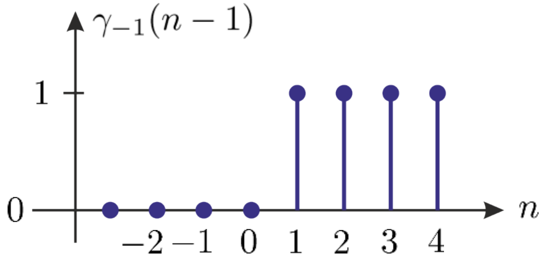
Aus der Differenz zweiter benachbarter Sprungfolgen resultiert die Impulsfolge!



- Umgekehrt wird statt der Integration eine Summation angewendet:

$$\gamma_{-1}(n) \;=\; \sum_{\kappa=-\infty}^{n} \gamma_0(\kappa).$$

Durch Summation entsteht aus der Impulsfolge die Sprungfolge!



- Auch hier gilt die (Flächen-) Summeneigenschaft: $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_0(n) \;=\; 1.$

Impuls – Teil 5

Ausblendeigenschaft des Impulses:

Kontinuierlich:

- $v(t)\,\delta_0(t-\tau) \;=\; v(\tau)\,\delta_0(t-\tau),$

  $= 0,$ außer in $t = \tau$

- $$\int\limits_{t=-\infty}^{\infty} v(t)\,\delta_0(t-\tau)\,dt \;=\; v(\tau).$$

Diskret:

- $v(n)\,\gamma_0(n-\kappa) \;=\; v(\kappa)\,\gamma_0(n-\kappa),$

  $= 0,$ außer in $n = \kappa$

- $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} v(n)\,\gamma_0(n-\kappa) \;=\; v(\kappa).$$

… Diese Eigenschaft ist nützlich für die Beschreibung der Signalabtastung (z.B. in A/D-Umsetzern).

Logische Erweiterung der Integrationsbeziehungen:

Wendet man die bisher gefundenen Integrations- bzw. Summationsbeziehungen, welche den Impuls und den Sprung verbinden,

kontinuierlich

$$\underbrace{\delta_{-1}(t)}_{\text{Sprung}} = \int\limits_{\tau=-\infty}^{t} \underbrace{\delta_0(\tau)}_{\text{Impuls}}\, d\tau$$

diskret

$$\underbrace{\gamma_{-1}(n)}_{\text{Sprung}} = \sum_{\kappa=-\infty}^{n} \underbrace{\gamma_0(\kappa)}_{\text{Impuls}}$$

nochmals an, so kann man Rampenfunktionen bzw. –folgen erzeugen:

kontinuierlich

$$\int\limits_{\tau=-\infty}^{t} \underbrace{\delta_{-1}(\tau)}_{\text{Sprung}}\, d\tau = t\,\delta_{-1}(t) = \underbrace{\delta_{-2}(t)}_{\text{Rampe}},$$

diskret

$$\sum_{\kappa=-\infty}^{n-1} \underbrace{\gamma_{-1}(\kappa)}_{\text{Sprung}} = n\,\gamma_{-1}(n) = \underbrace{\gamma_{-2}(n)}_{\text{Rampe}}$$

Rampe und Verallgemeinerung – Teil 2

Rampenfunktion und –folge:

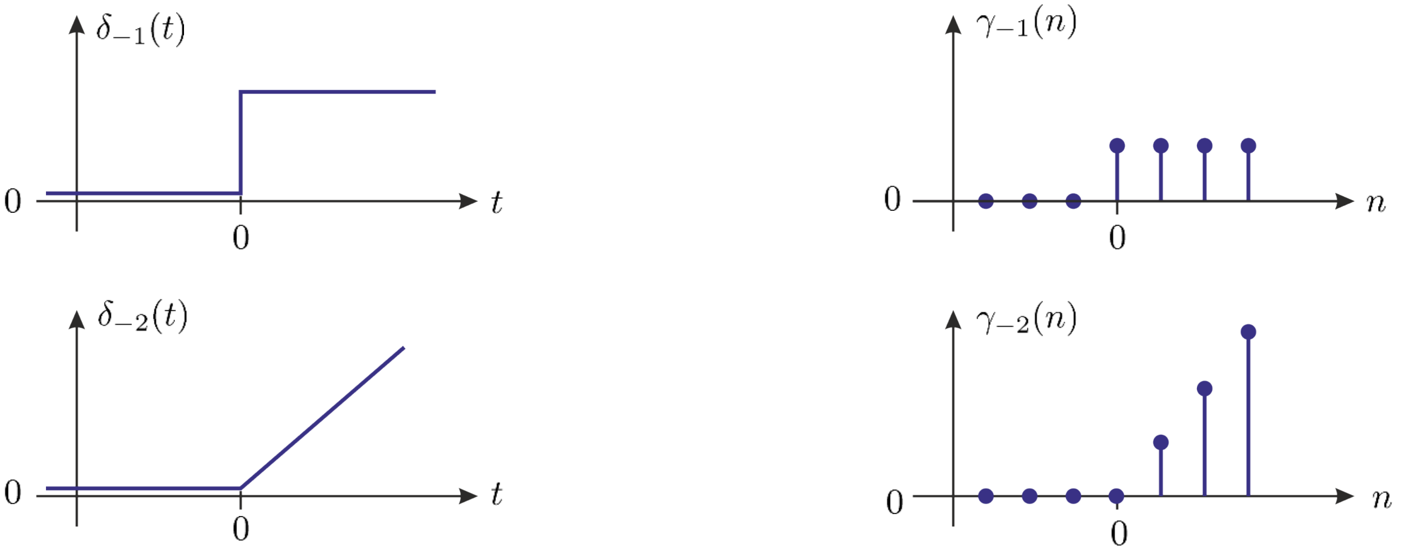
Integrationsbeziehungen

kontinuierlich

$$\int_{\tau=-\infty}^{t} \delta_{-1}(\tau)\, d\tau \;=\; t\,\delta_{-1}(t) \;=\; \delta_{-2}(t),$$

diskret

$$\sum_{\kappa=-\infty}^{n-1} \gamma_{-1}(\kappa) \;=\; n\,\gamma_{-1}(n) \;=\; \gamma_{-2}(n)$$



Rampe und Verallgemeinerung – Teil 3

Anmerkungen:

- Die Integration bzw. Summation kann mehrfach angewendet werden, dies führt dann auf weitere Funktions- bzw. Folgenfamilien. Im Rahmen dieser Vorlesung werden diese Funktionen bzw. Folgen aber nicht weiter betrachtet.
- Die Rampenfunktion bzw. –folge spielt in der ***Regelungstechnik*** eine zentrale Rolle.

Verständnisfragen

Partnerarbeit:

Versuchen Sie in Partnerarbeit folgende Fragen zu beantworten:

- Was erhält man, wenn man folgendes Integral löst?

$$y(t) \;=\; \int\limits_{\tau=-\infty}^{\infty} v(\tau)\,\delta_0(t-t_0-\tau)\,d\tau \;=\; ?$$

....

....

- Was stellt dieses „System“ dar?

....

....

- Welche Form besitzen die Graphen der Funktion $\delta_{-3}(t)$ bzw. der Folge $\gamma_{-3}(n)$?

....

....

Harmonische Exponentielle – Teil 1

Definition:

- Kontinuierlich

$$v(t) = V\, e^{j\omega t}, \ \text{mit } V \in \mathbb{C},\, \omega \in \mathbb{R}$$

- Diskret

$$v(n) = V\, e^{j\Omega n}, \ \text{mit } V \in \mathbb{C},\, \Omega \in \mathbb{R}$$

mit komplexer Amplitude

$$V = |V|\, e^{j\varphi}, \ \text{mit } \varphi \in \mathbb{R}$$

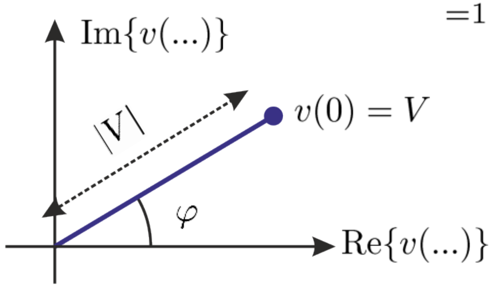
Diskussion – Teil 1:

- Wert für das Argument 0 (Startwert):
  - Kontinuierlich

$$v(0) = V\, \underbrace{e^{j\omega 0}}_{=1} = V = |V|\, e^{j\varphi}$$

  - Diskret

$$v(0) = V\, \underbrace{e^{j\Omega 0}}_{=1} = V = |V|\, e^{j\varphi}$$



Beides entspricht einem Punkt in der komplexen Ebene im Abstand $|V|$ vom Nullpunkt (Zeiger zum Punkt $v(0)$ mit dem Winkel φ gegen die reelle Achse).

Harmonische Exponentielle – Teil 2

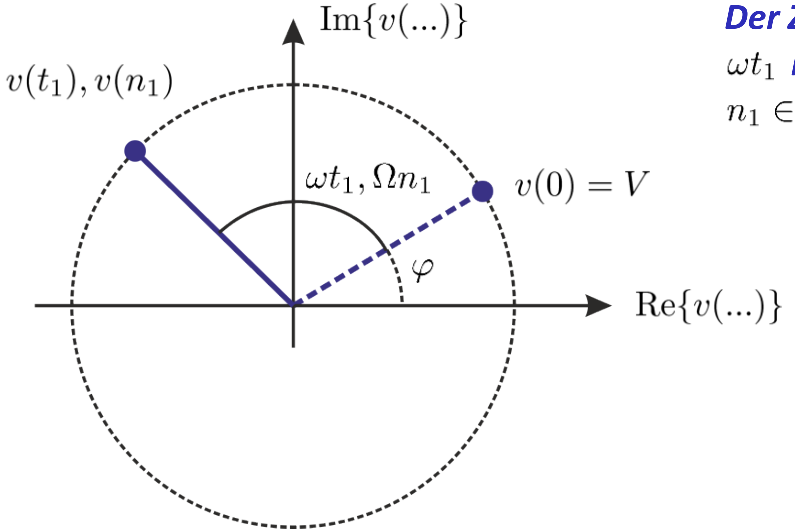
Diskussion – Teil 2:

- Wert für beliebige Argumente:
  - Kontinuierlich

$$v(t_1) = V\, e^{j\omega t_1} = |V|\, e^{j(\varphi + \omega t_1)}$$

  - Diskret

$$v(n_1) = V\, e^{j\Omega n_1} = |V|\, e^{j(\varphi + \Omega n_1)}$$



Der Zeiger $v(0) = V$ wird mit gleicher Länge um den Winkel ωt_1 bzw. Ωn_1 (mit der Nebenbedingung $t_1 \in \mathbb{R}$ bzw. $n_1 \in \mathbb{Z}$) weitergedreht.

C | A | U
Christian-Albrechts-Universität zu Kiel

Harmonische Exponentielle – Teil 3

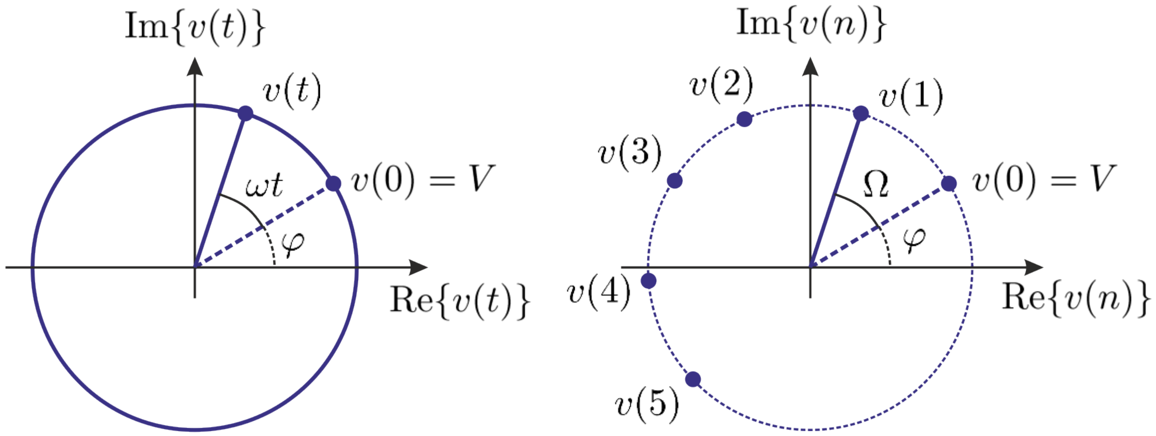
Diskussion – Teil 3:

- Funktions- bzw. Folgenverlauf:
  - Kontinuierlich

    $v(t) = V\, e^{j\omega t}$ beschreibt (kontinuierlich) Kreise mit Radius $|V|$ in der komplexen Ebene!

  - Diskret

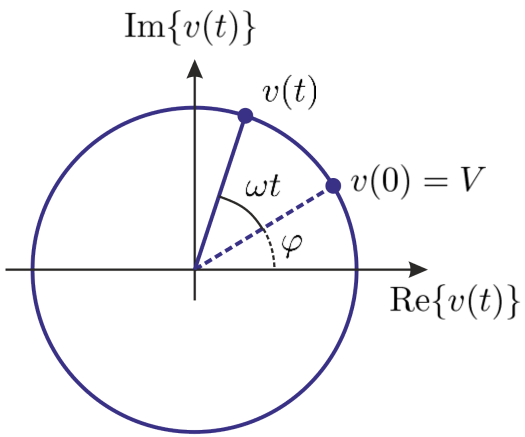
    $v(n) = V\, e^{j\Omega n}$ beschreibt (diskrete) Punkte auf einem Kreis mit Radius $|V|$ in der komplexen Ebene!

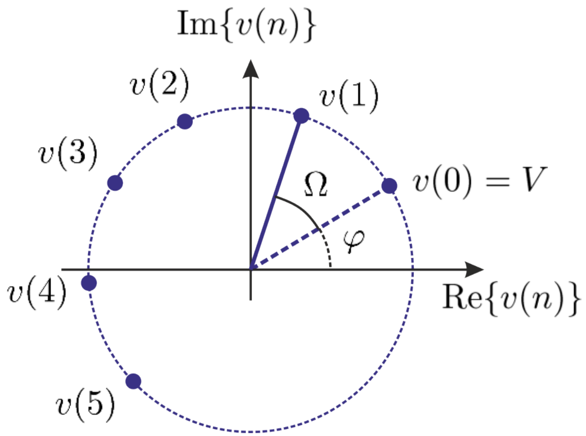


Harmonische Exponentielle – Teil 4

Diskussion – Teil 4:

- Periodizität
  - Kontinuierlich





Der Kreis wird mit wachsendem t immer vollständig durchlaufen. Die periodische Wieder-holung geschieht, wenn gilt $\omega t = 2\pi$:

$$\begin{aligned} v(t+\lambda T) &= V\, e^{j(\omega t + \lambda 2\pi)} \\ &= V\, e^{j\omega t} \underbrace{e^{j\lambda 2\pi}}_{=1\,\forall\,\lambda} \\ &= v(t). \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Periode: $T = \frac{2\pi}{\omega}.$

- Diskret

Der Kreis wird mit wachsendem n immer wieder durchlaufen, ***aber nicht immer in den selben Punkten***! Eine Wiederholung ist nach einem Umlauf möglich, nach mehreren Umläufen oder auch nie (siehe Übung).

Allgemeine komplexe Exponentielle – Teil 1

Definition:

- Kontinuierlich

$$v(t) \;=\; V\,e^{st},\;\text{mit } V \in \mathbb{C},\, s \in \mathbb{C}$$

- Diskret

$$v(n) \;=\; V\,z^{n},\;\text{mit } V \in \mathbb{C},\, z \in \mathbb{C}$$

… beide mit komplexer Amplitude

$$V \;=\; |V|\,e^{j\varphi},\;\text{mit } \varphi \in \mathbb{R}$$

und …

$$s \;=\; \sigma + j\omega,\;\text{mit } \sigma,\,\omega \in \mathbb{R}.$$

$$z \;=\; \rho\,e^{j\Omega},\;\text{mit } \rho,\,\Omega \in \mathbb{R}.$$

Diskussion – Teil 1:

- Wert für das Argument 0 (Startwert):
  - Kontinuierlich

$$v(0) \;=\; V\,\underbrace{e^{s0}}_{=1} \;=\; V \;=\; |V|\,e^{j\varphi}$$

$$v(0) \;=\; V\,\underbrace{z^{0}}_{=1} \;=\; V \;=\; |V|\,e^{j\varphi}$$

Beides entspricht – wie im vorigen Abschnitt über harmonische Exponentielle – einem Punkt in der komplexen Ebene im Abstand $|V|$ vom Nullpunkt mit dem Winkel φ gegen die reelle Achse.

Allgemeine komplexe Exponentielle – Teil 2

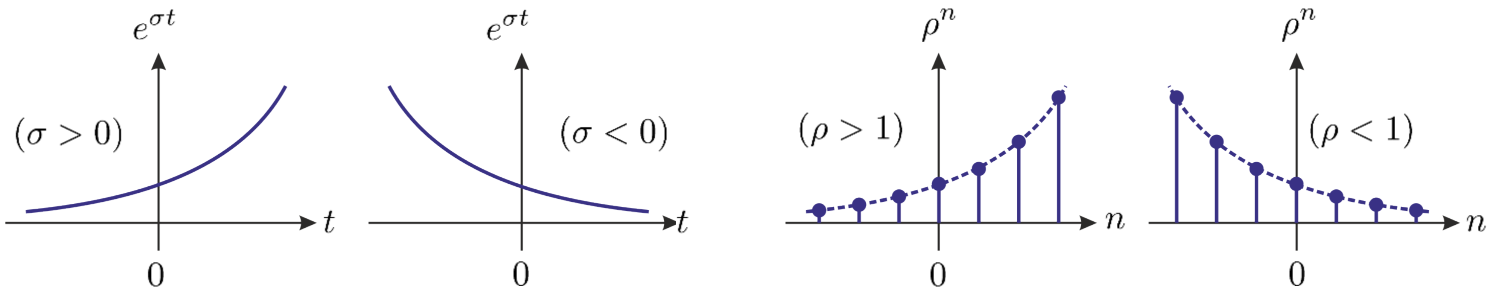
Diskussion – Teil 2:

- Funktions- bzw. Folgenverlauf:
  - Kontinuierlich

$$\begin{aligned} v(t) &= V\, e^{st} \\ &= |V|\, e^{j\varphi}\, e^{\sigma\, t}\, e^{j\omega t} \\ &= \underbrace{|V|\, e^{j(\varphi+\omega t)}}_{\text{Harmonische (kontinuierliche) Exponentielle}}\; \underbrace{e^{\sigma\, t}}_{\text{Zusätzliche Funktion}} \end{aligned}$$

  - Diskret

$$\begin{aligned} v(n) &= V\, z^{n} \\ &= |V|\, e^{j\varphi}\, \rho^{n}\, e^{j\Omega n} \\ &= \underbrace{|V|\, e^{j(\varphi+\Omega n)}}_{\text{Harmonische (diskrete) Exponentielle}}\; \underbrace{\rho^{n}}_{\text{Zusätzliche Folge}} \end{aligned}$$



Allgemeine komplexe Exponentielle – Teil 3

Diskussion – Teil 3:

- Sonderfall bei den zusätzlichen Funktionen:

Falls $\sigma = 0$ bzw. $\rho = 1$ gilt, dann wird aus den Zusatzfunktionen bzw. -folgen

- Kontinuierlich

$$\begin{aligned} v(t) &= V\, e^{st} \\ &= V\, e^{\sigma\, t}\, e^{j\omega t} \\ &= V\, e^{0}\, e^{j\omega t} \\ &= V\, e^{j\omega t} \end{aligned}$$

- Diskret

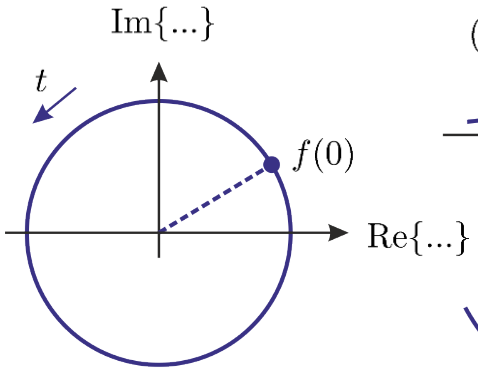
$$\begin{aligned} v(n) &= V\, z^{n} \\ &= V\, \rho^{n}\, e^{j\Omega n} \\ &= V\, 1^{n}\, e^{j\Omega n} \\ &= V\, e^{j(\varphi+\Omega n)} \end{aligned}$$

und die allgemeine komplexe Exponentielle wird zur ***harmonischen Exponentiellen***.

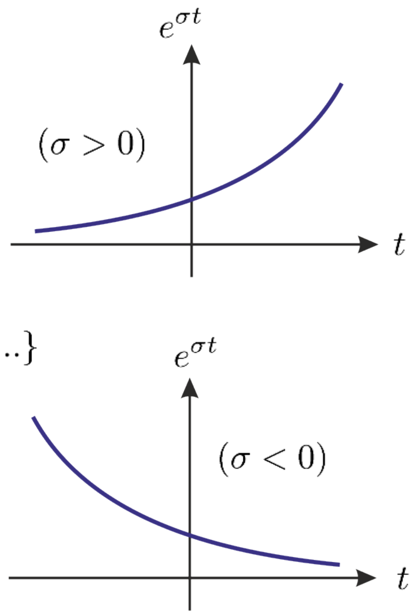
Allgemeine komplexe Exponentielle – Teil 4

Diskussion – Teil 4:

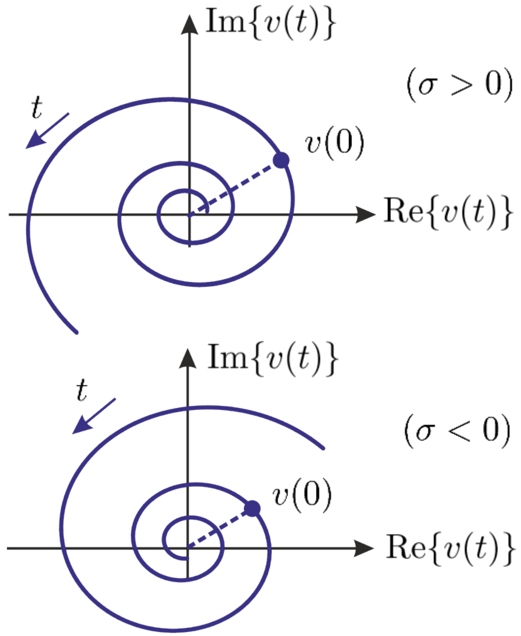
- Kombination der harmonischen Exponentiellen und der Zusatzfunktion führt auf eine „Spiralfunktion“:



Harmonische Exponentielle



„Zusatzfunktion“



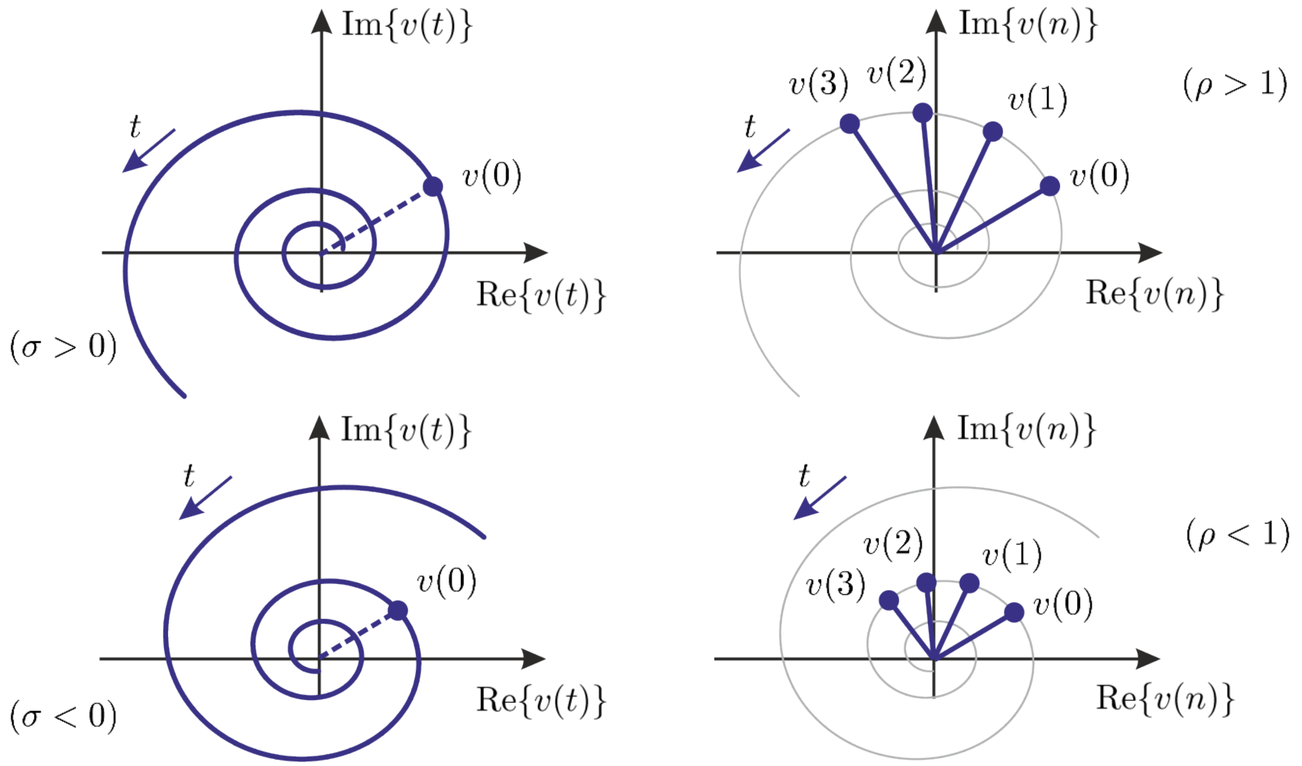
Resultierende komplexe Exponentielle

Christian-Albrechts-Universität zu Kiel

Allgemeine komplexe Exponentielle – Teil 5

Diskussion – Teil 5:

- Im Diskreten gilt etwas Ähnliches:



Enthaltene Sonderfälle und Teilsignale – Teil 1

Allgemeiner Ansatz:

- Kontinuierlich

$$\begin{aligned} v(t) &= V\, e^{st}, \text{ mit } V \in \mathbb{C},\, s \in \mathbb{C} \\ s &= \sigma + j\omega, \text{ mit } \sigma,\, \omega \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

- Diskret

$$\begin{aligned} v(n) &= V\, z^{n}, \text{ mit } V \in \mathbb{C},\, z \in \mathbb{C} \\ z &= \rho\, e^{j\Omega}, \text{ mit } \rho,\, \Omega \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Sonderfall 1:

- Kontinuierlich

$$\begin{aligned} \sigma &= 0, \quad \Rightarrow \quad s = j\omega \\ & \qquad\;\; \Rightarrow \quad v(t) = V\, e^{j\omega t} \end{aligned}$$

- Diskret

$$\begin{aligned} \rho &= 1, \quad \Rightarrow \quad z = e^{j\Omega} \\ & \qquad\;\; \Rightarrow \quad v(n) = V\, e^{j\Omega n} \end{aligned}$$

… harmonische Exponentielle!

Darin enthalten:

- Kontinuierlich

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\{V\, e^{j\omega t}\} &= |V|\, \cos(\omega t + \varphi) \\ \mathrm{Im}\{V\, e^{j\omega t}\} &= |V|\, \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

- Diskret

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\{V\, e^{j\Omega n}\} &= |V|\, \cos(\Omega n + \varphi) \\ \mathrm{Im}\{V\, e^{j\Omega n}\} &= |V|\, \sin(\Omega n + \varphi) \end{aligned}$$

Enthaltene Sonderfälle und Teilsignale – Teil 2

Allgemeiner Ansatz:

- Kontinuierlich

$$\begin{aligned} v(t) &= V\,e^{st}, \text{ mit } V \in \mathbb{C},\ s \in \mathbb{C} \\ s &= \sigma + j\omega, \text{ mit } \sigma,\ \omega \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

- Diskret

$$\begin{aligned} v(n) &= V\,z^{n}, \text{ mit } V \in \mathbb{C},\ z \in \mathbb{C} \\ z &= \rho\,e^{j\Omega}, \text{ mit } \rho,\ \Omega \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Sonderfall 2:

- Kontinuierlich

$$\begin{aligned} \sigma \neq 0, \quad &\Rightarrow \quad s = \sigma + j\omega \\ &\Rightarrow \quad v(t) = V\,e^{\sigma t}\,e^{j\omega t} \end{aligned}$$

- Diskret

$$\begin{aligned} \rho \neq 1, \quad &\Rightarrow \quad z = \rho\,e^{j\Omega} \\ &\Rightarrow \quad v(n) = V\,\rho^{n}\,e^{j\Omega n} \end{aligned}$$

Darin enthalten:

- Kontinuierlich

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\{V\,e^{st}\} &= |V|\,e^{\sigma t}\,\cos(\omega t + \varphi) \\ \mathrm{Im}\{V\,e^{st}\} &= |V|\,e^{\sigma t}\,\sin(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

- Diskret

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\{V\,z^{n}\} &= |V|\,\rho^{n}\,\cos(\Omega n + \varphi) \\ \mathrm{Im}\{V\,z^{n}\} &= |V|\,\rho^{n}\,\sin(\Omega n + \varphi) \end{aligned}$$

… reelle, exponentiell wachsende bzw. gedämpfte Sinus-Schwingungen!

Enthaltene Sonderfälle und Teilsignale – Teil 3

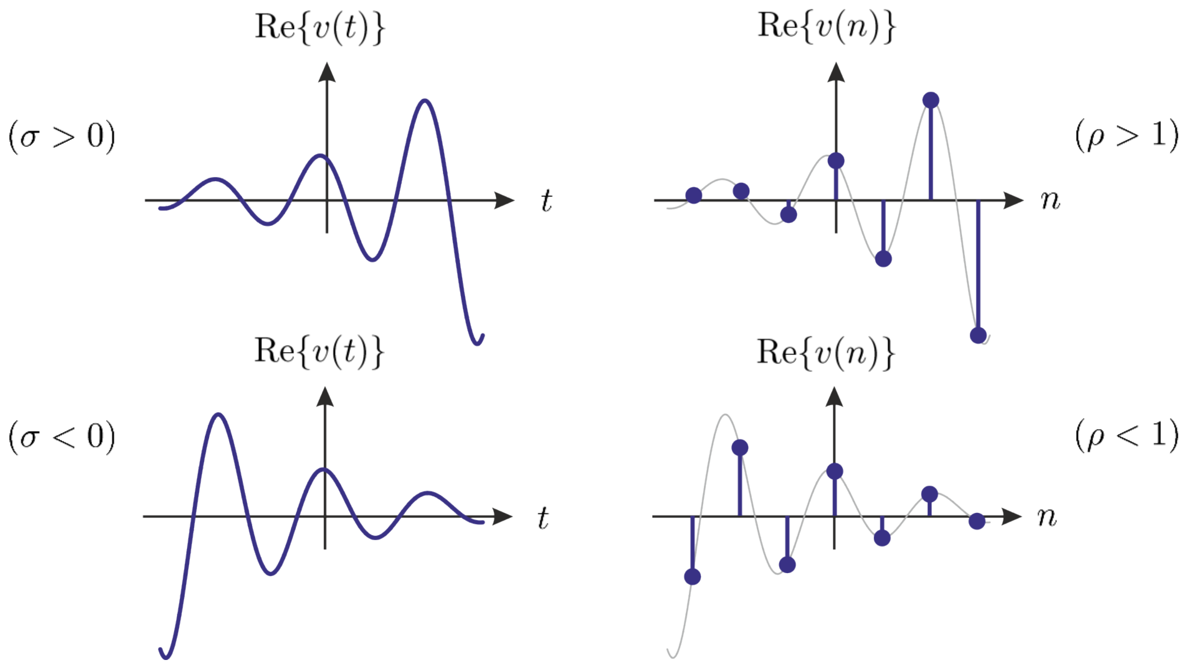
Signalbeispiel zum Sonderfall 2:

- Kontinuierlich

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\{V\,e^{st}\} &= |V|\,e^{\sigma t}\,\cos(\omega t+\varphi)\\ \mathrm{Im}\{V\,e^{st}\} &= |V|\,e^{\sigma t}\,\sin(\omega t+\varphi)\end{aligned}$$

- Diskret

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\{V\,z^{n}\} &= |V|\,\rho^{n}\,\cos(\Omega n+\varphi)\\ \mathrm{Im}\{V\,z^{n}\} &= |V|\,\rho^{n}\,\sin(\Omega n+\varphi)\end{aligned}$$



Enthaltene Sonderfälle und Teilsignale – Teil 4

Allgemeiner Ansatz:

- Kontinuierlich

$$\begin{aligned} v(t) &= V\,e^{st},\ \text{mit } V \in \mathbb{C},\ s \in \mathbb{C} \\ s &= \sigma + j\omega,\ \text{mit } \sigma,\, \omega \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

- Diskret

$$\begin{aligned} v(n) &= V\,z^{n},\ \text{mit } V \in \mathbb{C},\ z \in \mathbb{C} \\ z &= \rho\,e^{j\Omega},\ \text{mit } \rho,\, \Omega \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Sonderfall 3:

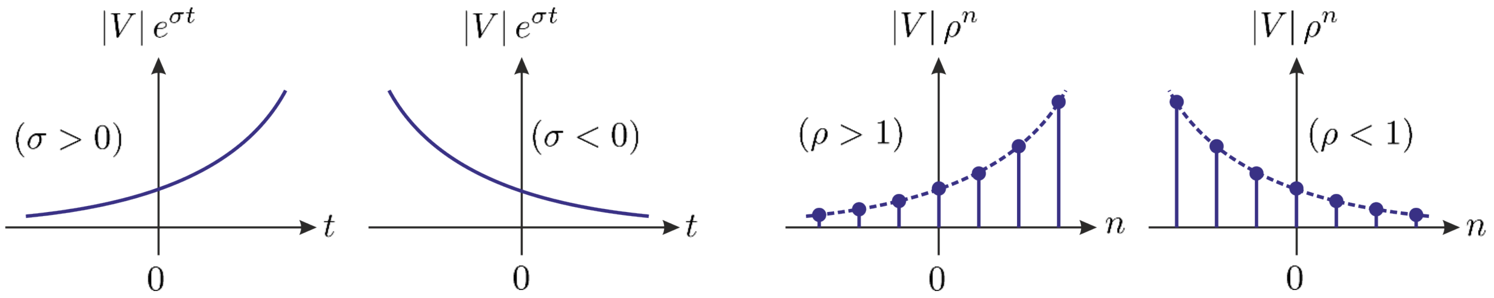
- Kontinuierlich

$$V = |V|,\ \sigma \neq 0,\ \omega = 0$$
$$\Rightarrow\ v(t) = |V|\,e^{\sigma t}$$

- Diskret

$$V = |V|,\ \rho \neq 1,\ \Omega = 0$$
$$\Rightarrow\ v(n) = |V|\,\rho^{n}$$

… reelle, wachsende/gedämpfte Exponentialfunktion bzw. -folge!



Enthaltene Sonderfälle und Teilsignale – Teil 5

Allgemeiner Ansatz:

- Kontinuierlich

$$v(t) = V\,e^{st}, \text{ mit } V \in \mathbb{C},\, s \in \mathbb{C}$$
$$s = \sigma + j\omega, \text{ mit } \sigma,\, \omega \in \mathbb{R}.$$

- Diskret

$$v(n) = V\,z^{n}, \text{ mit } V \in \mathbb{C},\, z \in \mathbb{C}$$
$$z = \rho\,e^{j\Omega}, \text{ mit } \rho,\, \Omega \in \mathbb{R}.$$

Sonderfall 4:

- Kontinuierlich

$$V = |V|,\, \sigma = 0,\, \omega = 0$$
$$\Rightarrow \; v(t) = |V|$$

- Diskret

$$V = |V|,\, \rho = 1,\, \Omega = 0$$
$$\Rightarrow \; v(n) = |V|$$

… konstantes Signal, (Gleichstrom, Schwingung der Frequenz $\omega,\, \Omega = 0$***)***

Bedeutung der Elementarsignale – Teil 1

Bemerkungen – Teil 1:

- Alle vorgestellten Elementarsignale eignen sich als ***Bauelemente***, aus denen sich weitgehend beliebige Signale zusammensetzen lassen und zwar auf einfache Weise durch ***lineare Überlagerung*** (= Addition).
- ***Lineare*** Systeme sind eine wichtige Systemklasse (siehe bisherige und zukünftige Folien):
  - Für lineare Systeme sind die ***Reaktionen auf Elementarsignale*** relativ einfach anzugeben, insbesondere, wenn das System zusätzlich ***verschiebungsinvariant*** ist.
  - Für lineare Systeme gilt der ***Überlagerungssatz***.
  - Aus den beiden vorigen Punkten folgt, dass man die Systemreaktion auf weitgehend beliebige Signale durch lineare ***Überlagerung von Elementarsignalreaktionen*** bestimmen kann.

Bedeutung der Elementarsignale – Teil 2

Bemerkungen – Teil 2:

- Der Übergang zu ***allgemeinen komplexen Exponentialsignalen*** ist aus folgenden Gründen sinnvoll:
  - Gegeben: $v_1(...) \in \mathbb{R}$
  - Gesucht: $y_1(...) = S\{v_1(...)\} \in \mathbb{R}$ (= reellwertiges System)

Lösung:

- Erweiterung: $v_1(...) \rightarrow v(...) = v_1(...) + j\,v_2(...)$

  … hier wurde ein zweites, reell wertiges Eingangssignal als Imaginärteil addiert (überlagert). Der Vorfaktor j ist als Gewicht zu verstehen!

- Systembeschreibung: $y(...) = S\{v(...)\} \in \mathbb{C}$

  … die Berechnung der komplexwertigen Signalreaktion ist oftmals deutlich einfacher zu berechnen!

- Wegen der Linearität gilt: $y(...) = S\{v_1(...) + j\,v_2(...)\} = \underbrace{S\{v_1(...)\}}_{=y_1(...)} + j\,S\{v_2(...)\}$
- Dadurch ergibt sich folgende ***Lösung***: $y_1(...) = \mathrm{Re}\Big\{S\{v(...)\}\Big\}$

Verständnisfragen

Partnerarbeit:

Versuchen Sie in Partnerarbeit folgende Fragen zu beantworten:

- Wie kann man zwei komplexe Schwingungen so kombinieren, dass eine reelle Schwingung bzw. eine rein imaginäre Schwingung entsteht?

  ……

  ……

- Wie würden Sie ein System „bauen“, welches zumindest kurzzeitig eine reelle, sich verstärkende Schwingung erzeugt?

  ……

  ……

- Nennen Sie reale Beispiele für Systeme, die näherungsweise abklingende Schwingungen erzeugen!

  ……

  ……

Abschließende Zusammenfassung

Übersicht des nächsten Abschnitts

Reaktion auf Impulse und Sprünge

Allgemeines:

- Die Reaktion eines Systems auf einen Impuls $\delta_0(t)$ bzw. $\gamma_0(n)$ wird als ***Impulsantwort***

  $$h_0(t) \;=\; S\{\delta_0(t)\}$$

  bzw.

  $$h_0(n) \;=\; S\{\gamma_0(n)\}$$

  bezeichnet.

- Die Reaktion eines Systems auf einen Sprung $\delta_{-1}(t)$ bzw. $\gamma_{-1}(n)$ wird als ***Sprungantwort***

  $$h_{-1}(t) \;=\; S\{\delta_{-1}(t)\}$$

  bzw.

  $$h_{-1}(n) \;=\; S\{\gamma_{-1}(n)\}$$

  bezeichnet.

- Beide Systemantworten sind im Falle von Linearität des Systems relativ leicht zu berechnen bzw. zu messen (Details findet man hierzu – z. B. – im Abschnitt „Lineare Systeme“).

Reaktion linearer, verschiebungsinvarianter Systeme auf Exponentielle – Teil 1

Herleitung – Teil 1:

- Sei mit

$$\boldsymbol{y}(...) \;=\; S\{\boldsymbol{v}(...)\}$$

Um möglichst allgemein zu bleiben, wird hier ein System mit vektoriellem Ein- und Ausgang verwendet!

ein ***lineares, verschiebungsinvariantes System*** bzw. ein Operator gegeben.
Dann gilt bei Anregung mit allgemeinen Exponentiellen …

… im Kontinuierlichen:

$$\boldsymbol{y}(t) \;=\; S\{\boldsymbol{V}\,e^{st}\}.$$

… im Diskreten:

$$\boldsymbol{y}(n) \;=\; S\{\boldsymbol{V}\,z^{n}\}.$$

- Eine ***Verschiebung*** der Eingangssignalvektoren um t_0 bzw. n_0 bewirkt ...

… im Kontinuierlichen:

$$\boldsymbol{v}(t-t_0) \;=\; \boldsymbol{V}\,e^{s(t-t_0)} \;=\; \boldsymbol{V}\,e^{st}\,e^{-st_0}.$$

… im Diskreten:

$$\boldsymbol{v}(n-n_0) \;=\; \boldsymbol{V}\,z^{(n-n_0)} \;=\; \boldsymbol{V}\,z^{n}\,z^{-n_0}.$$

- Die ***Systemreaktion*** darauf lautet …

… im Kontinuierlichen:

$$\tilde{\boldsymbol{y}}(t) = S\{\boldsymbol{V}\,e^{s(t-t_0)}\} = S\{\boldsymbol{V}\,e^{st}e^{-st_0}\}.$$

… im Diskreten:

$$\tilde{\boldsymbol{y}}(n) \;=\; S\{\boldsymbol{V}\,z^{(n-n_0)}\} \;=\; S\{\boldsymbol{V}\,z^{n}\,z^{-n_0}\}.$$

Reaktion linearer, verschiebungsinvarianter Systeme auf Exponentielle – Teil 2

Herleitung – Teil 2:

- Die ***Systemreaktion*** darauf lautet (Wiederholung) …

… im Kontinuierlichen:

$$\tilde{\boldsymbol{y}}(t) = S\Big\{\boldsymbol{V}\, e^{s(t-t_0)}\Big\} = S\Big\{\boldsymbol{V}\, e^{st}\, \underbrace{e^{-st_0}}_{\text{Konstant bezüglich } t!}\Big\}.$$

… im Diskreten:

$$\tilde{\boldsymbol{y}}(n) = S\Big\{\boldsymbol{V}\, z^{(n-n_0)}\Big\} = S\Big\{\boldsymbol{V}\, z^{n}\, \underbrace{z^{-n_0}}_{\text{Konstant bezüglich } n!}\Big\}.$$

- Aufgrund der vorausgesetzten ***Linearität*** darf ein konstanter Faktor vor den Operator gezogen werden. Das ergibt …

… im Kontinuierlichen:

$$\tilde{\boldsymbol{y}}(t) = e^{-st_0}\, \underbrace{S\Big\{\boldsymbol{V}\, e^{st}\Big\}}_{=\boldsymbol{y}(t)} = e^{-st_0}\, \boldsymbol{y}(t).$$

… im Diskreten:

$$\tilde{\boldsymbol{y}}(n) = z^{-n_0}\, \underbrace{S\Big\{\boldsymbol{V}\, z^{n}\Big\}}_{\boldsymbol{y}(n)} = z^{-n_0}\, \boldsymbol{y}(n).$$

- Wegen der geforderten ***Verschiebungsinvarianz*** muss allerdings auch gelten

… im Kontinuierlichen:

$$\tilde{\boldsymbol{y}}(t) = S\Big\{\boldsymbol{v}(t-t_0)\Big\} = \boldsymbol{y}(t-t_0).$$

… im Diskreten:

$$\tilde{\boldsymbol{y}}(n) = S\Big\{\boldsymbol{v}(n-n_0)\Big\} = \boldsymbol{y}(n-n_0).$$

Reaktion linearer, verschiebungsinvarianter Systeme auf Exponentielle – Teil 3

Herleitung – Teil 3:

- Bringt man die Linearitäts- und die Verschiebungsinvarianzanforderung zusammen, so ergibt sich …

… im Kontinuierlichen:

$$e^{-st_0}\,\boldsymbol{y}(t) \;=\; \boldsymbol{y}(t-t_0).$$

… im Diskreten:

$$z^{-n_0}\,\boldsymbol{y}(n) \;=\; \boldsymbol{y}(n-n_0).$$

- Diese Bedingungen sind nur zu erfüllen, wenn $\boldsymbol{y}(t)$ bzw. $\boldsymbol{y}(n)$ selbst exponentiell sind!

Fazit:

- ***Exponentielle Erregungen werden durch lineare, verschiebungsinvariante Systeme am Ausgang reproduziert, d.h. die Signalform (Schwingungsfrequenz, Dämpfungsverhalten) bleibt erhalten, es ändert sich lediglich die komplexe Amplitude.***

- Die (komplexwertige) Amplitudenänderung lässt sich formal beschreiben durch:

Vektor der Länge R

Vektor der Länge L

$$\boldsymbol{Y} \;=\; \boldsymbol{H}\,\boldsymbol{V}.$$

Matrix mit R Zeilen und L Spalten

Reaktion linearer, verschiebungsinvarianter Systeme auf Exponentielle – Teil 4

Anmerkungen – Teil 1:

- Die Bedeutung der Matrix $\boldsymbol{H}$ wird im weiteren Verlauf der Vorlesung noch deutlicher.
- Die einzelnen Elemente der Matrix $\boldsymbol{H}$ sind im Allgemeinen nicht konstant, sondern hängen von s bzw. z ab.
- Im Allgemeinen ist $\boldsymbol{H}$ komplexwertig , d.h. es gilt $\boldsymbol{H} \in \mathbb{C}^{R \times L}$.
- Je nach Wahl von s und z können auch die Eingangsamplituden V_l verschieden sein. Bei Abhängigkeit von $\boldsymbol{H}$ von s bzw. z sind im Allgemeinen auch die Ausgangsamplituden Y_r verschieden. In diesem Fall schreibt man allgemeiner …

… im Kontinuierlichen

$$\boldsymbol{Y}(s) = \boldsymbol{H}(s)\,\boldsymbol{V}(s)$$

… im Diskreten

$$\boldsymbol{Y}(z) = \boldsymbol{H}(z)\,\boldsymbol{V}(z)$$

bzw. bei harmonischer Anregung …

… im Kontinuierlichen ($\sigma = 0,\ s = j\omega$)

$$\boldsymbol{Y}(j\omega) = \boldsymbol{H}(j\omega)\,\boldsymbol{V}(j\omega).$$

… im Diskreten ($\rho = 1,\ z = e^{j\Omega}$)

$$\boldsymbol{Y}\big(e^{j\Omega}\big) = \boldsymbol{H}\big(e^{j\Omega}\big)\,\boldsymbol{V}\big(e^{j\Omega}\big).$$

Reaktion linearer, verschiebungsinvarianter Systeme auf Exponentielle – Teil 5

Anmerkungen – Teil 2:

- Man nennt
  - $\boldsymbol{H}(s)$ bzw. $\boldsymbol{H}(z)$ die Matrix der ***Übertragungsfunktionen*** und
  - $\boldsymbol{H}(j\omega)$ bzw. $\boldsymbol{H}(e^{j\Omega})$ die Matrix der ***Frequenzgangsfunktionen***.

Verständnisfragen

Partnerarbeit:

Versuchen Sie in Partnerarbeit folgende Fragen zu beantworten:

- Wie würden Sie den Frequenzgang eines Systems ausmessen?

  ………

  ………

- Was muss für den Betrag des Frequenzgangs eines Systems gelten, welches das Eingangssignal lediglich um einige Zeit verzögert?

  ………

  ………

- Was muss für die Phase des Frequenzgangs des o.g. Systems gelten?

  ………

  ………

Abschließende Zusammenfassung

Übersicht des nächsten Abschnitts

Zerlegung in Impulsanteile – Teil 1

Zerlegung für diskrete Signale:

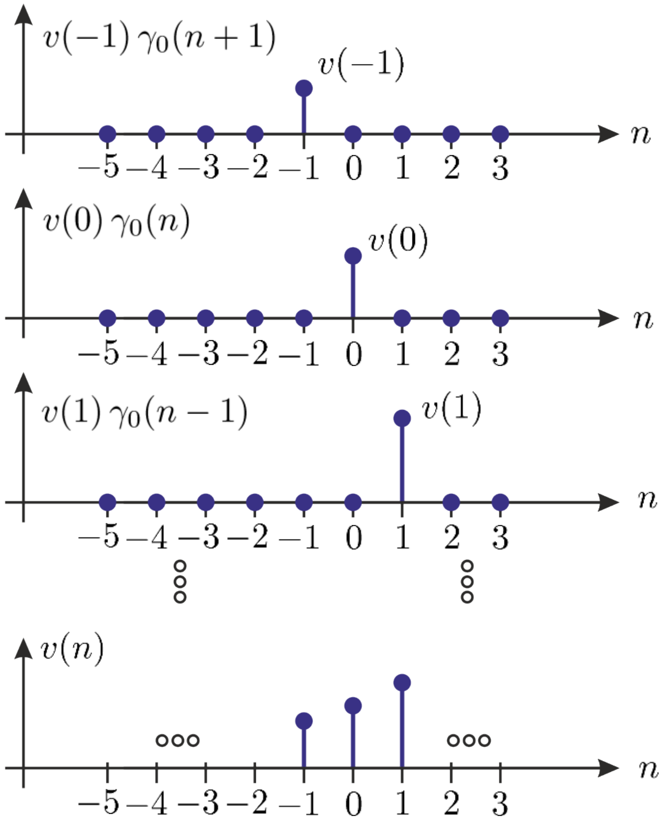
- Eine beliebige Signalfolge $v(n)$ kann in eine Summe gewichteter Impulsfolgen (***Linearkombination***) gemäß

$$v(n) \;=\; \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} v(\kappa)\,\gamma_0(n-\kappa)$$

zerlegt werden.

Unendlich lange Impulsfolge mit lauter Nullen und einer Eins an der Stelle $n=\kappa$.

Summation aller gewichteter Teilfolgen



Zerlegung in Impulsanteile – Teil 2

Beweis für die diskrete Zerlegung:

- Basierend auf der sog. ***Ausblendeigenschaft*** der Impulsfolge (vgl. frühere Folien), kann das Produkt aus Signal $v(\kappa)$ und verschobener Impulsfolge $\gamma_0(n-\kappa)$, wie folgt umgeformt werden:

$$v(\kappa)\,\gamma_0(n-\kappa) \;=\; v(n)\,\gamma_0(n-\kappa).$$

- Summiert man nun über alle κ, so kann durch die Ausblendeigenschaft das Signal vor die Summe gezogen werden:

$$\sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} v(\kappa)\,\gamma_0(n-\kappa) \;=\; \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} v(n)\,\gamma_0(n-\kappa) \;=\; v(n) \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} \gamma_0(n-\kappa).$$

- Verwendet man schließlich noch, dass die Summe über alle Elemente der Impulsfolge Eins ist (vgl. bisherige Folien), so ergibt sich die zuvor beschriebene Zerlegungsgleichung:

$$\sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} v(\kappa)\,\gamma_0(n-\kappa) \;=\; v(n) \underbrace{\sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} \gamma_0(n-\kappa)}_{=1} \;=\; v(n).$$

Zerlegung in Impulsanteile – Teil 3

Zerlegung für kontinuierliche Signale:

- Eine beliebiges Signal $v(t)$ kann in eine verallgemeinerte Summe (Integration) gewichteter Impulsfunktionen$\delta_0(t-\tau)$ (***Linearkombination***) zerlegt werden:

$$v(t) \;=\; \int\limits_{\tau=-\infty}^{\infty} v(\tau)\,\delta_0(t-\tau)\,d\tau.$$

- Der Beweis hierzu erfolgt analog zur diskreten Herleitung. Man startet mit der Ausblendeigenschaft und setzt diese in das Integral über das Produkt aus Signal und verschobenem Dirac-Stoß ein:

$$\int\limits_{\tau=-\infty}^{\infty} v(\tau)\,\delta_0(t-\tau)\,d\tau \;=\; \int\limits_{\tau=-\infty}^{\infty} v(t)\,\delta_0(t-\tau)\,d\tau \;=\; v(t)\int\limits_{\tau=-\infty}^{\infty} \delta_0(t-\tau)\,d\tau.$$

- Auch hier kann wieder die Flächeneigenschaft der Dirac-Funktion (vgl. Folie 9) eingesetzt werden:

$$\int\limits_{\tau=-\infty}^{\infty} v(\tau)\,\delta_0(t-\tau)\,d\tau \;=\; v(t)\underbrace{\int\limits_{\tau=-\infty}^{\infty} \delta_0(t-\tau)\,d\tau}_{=1} \;=\; v(t).$$

Zerlegung in Sprunganteile – Teil 1

Zerlegung für diskrete Signale:

- Eine beliebige Signalfolge $v(n)$ kann in eine Summe gewichteter Sprungfolgen (***Linearkombination***) gemäß

$$v(n) = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} \underbrace{\Delta v(\kappa)\, \gamma_{-1}(n-\kappa)}_{\text{Sprungfolge mit Sprung um } \Delta v(\kappa) \text{ an der Stelle } n=\kappa.} + \underbrace{v(-\infty)}_{\text{Startwert (ganz „links“)}} \underbrace{\gamma_{-1}\big(n-(-\infty)\big)}_{\text{Sprung bei } n=-\infty}$$

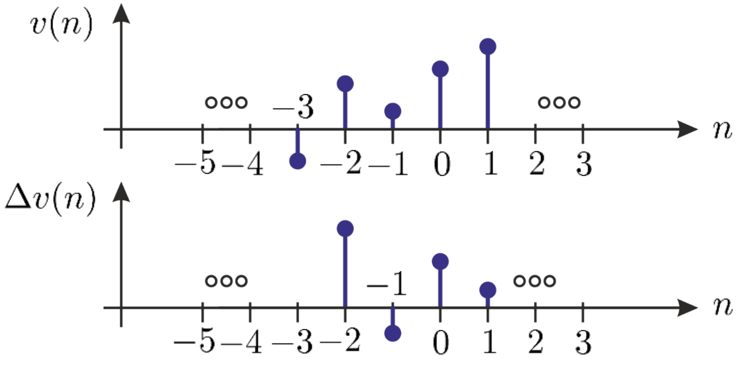
zerlegt werden. Die Gewichte sind dabei als die Signaländerungen

$$\Delta v(\kappa) = v(\kappa) - v(\kappa-1)$$

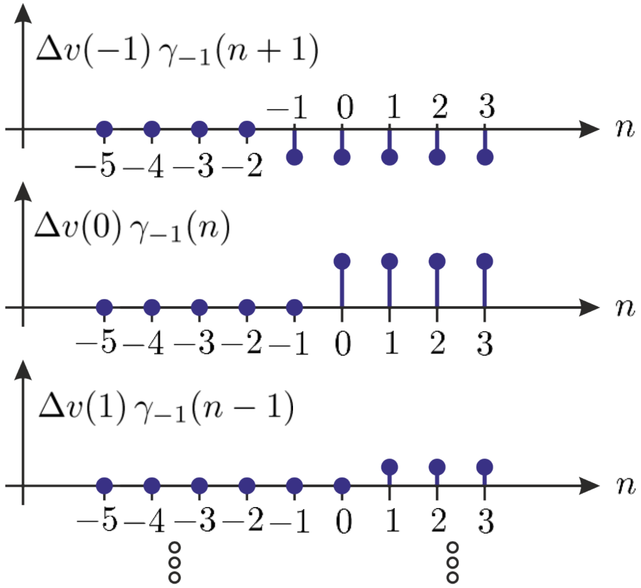
definiert.

Zerlegung in Sprunganteile – Teil 2

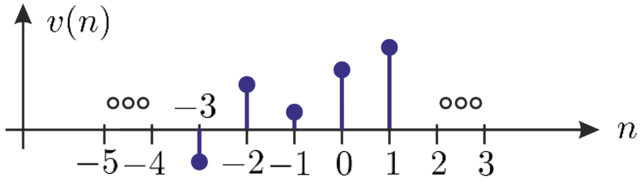
Veranschaulichung für diskrete Signale:



Umwandlung des Signal in Signaldifferenzen



Summation aller gewichteter Teilfolgen



Zerlegung in Sprunganteile – Teil 3

Zerlegung für kontinuierliche Signale:

- Eine beliebiges Signal $v(t)$ kann in eine verallgemeinerte Summe (Integration) gewichteter Sprungfunktionen $\delta_{-1}(t-\tau)$ (***Linearkombination***) zerlegt werden:

$$v(t) \;=\; \int\limits_{\tau=-\infty}^{\infty} \dot{v}(\tau)\,\delta_{-1}(t-\tau)\,d\tau + v(-\infty)\,\delta_{-1}\big(t-(-\infty)\big)$$

mit

$$\dot{v}(\tau) \;=\; \frac{dv(\tau)}{d\tau}$$ (bzw. $\dot{v}(\tau) \;=\; D\big[v(\tau)\big]$ bei Unstetigkeit).

Anmerkungen – Teil 1:

- Auch die oben beschriebene Zerlegung lässt sich zumindest als Näherung anschaulich deuten (siehe hierzu die Übung der nächsten Woche).

Zerlegung in Sprunganteile – Teil 4

Anmerkungen – Teil 2:

- Offenbar wurde hier schon mehrfach beobachtet:
  - Kontinuierliche Signale $\longrightarrow$ Integrale, Differentiationen
  - Diskrete Signale $\longrightarrow$ Summen, Differenzen

  Diese Entsprechung wird uns immer wieder begegnen.
- Die diskreten Varianten sind dabei ***nicht*** a priori als ***Näherung*** der kontinuierlichen zu verstehen (numerische Integration). Sie können aber manchmal so verwendet werden.

Zerlegung in Exponentialanteile

Allgemeines:

- Der Zerlegung in Exponentielle liegt der gleiche Gedanke wie in den vorherigen beiden Zerlegungen zugrunde: Man stellt $v(...)$ als gewichtete Summe bzw. als verallgemeinerte Summation (Integration) dar, mit Gewichten, die aus $v(...)$ zu berechnen sind.
- Die Komponenten bzw. Gewichtsterme bei ihrer Frequenz ω bzw. Ω (bzw. den allgemeineren Variablen s bzw. z) nennt man ***Spektralanteile*** mit ihren ***Spektralwerten***.
- Die Bestimmung der Spektralanteile bzw. –werte nennt man ***Spektralanalyse***.
- Das Zusammensetzen der gewichteten Spektralanteile zu einem Gesamtsignal $v(...)$ wird ***Spektralsynthese*** genannt.

Anmerkung:

- Mathematisch ist der Spektralbegriff weiter gefasst: Man kann anstelle von Exponentialfunktionen auch andere, für eine Anwendung geeignete, Basisfunktionen verwenden. Für viele Fälle eigenen sich Exponentialanteile aber besonders gut: Sie sind sog. ***Eigenfunktionen*** von linearen, zeitinvarianten Systemen (siehe frühere Folien).

Verständnisfragen

Partnerarbeit:

Versuchen Sie in Partnerarbeit folgende Fragen zu beantworten:

- Wie sieht die Zerlegung einer Sprungfolge in Impulse aus?

  ……

  ……

- Wie kann man einen Impuls in Sprungfolgen zerlegen?

  ……

  ……

- Wozu kann man Spektralanalysen verwenden?

  ……

  ……

Abschließende Zusammenfassung