

Sommersemester 2022

Signale und Systeme I

Übungsaufgaben

Inhaltsverzeichnis

1	Aufgaben	3
1	Signalleistung und -energie, Variablenormierung	3
2	Systemeigenschaften zeitkontinuierlicher Systeme	3
3	Systemeigenschaften zeitdiskreter Systeme	4
4	Systemeigenschaften zeitkontinuierlicher Systeme	4
5	Periodizität kontinuierlicher Signale	4
6	Abtastung, Periodizität diskreter Signale	4
7	Periodizität diskreter Signale	4
8	Periodizität diskreter Signale	5
9	Fourier-Reihe	5
10	Fourier-Reihe	5
11	Diskrete Fourier-Transformation	6
12	Fourier-Reihe, Abtastung, diskrete Fourier-Transformation	6
13	Diskrete Fourier-Transformation	6
14	Fourier-Transformation zeitkontinuierlicher Signale	6
15	Fourier-Transformation zeitdiskreter Signale	7
16	Fourier-Transformation	7
17	Diskrete Fourier-Transformation	8
18	Faltung kontinuierlicher Signale	8
19	Faltung diskreter Signale	9
20	Fourier-Transformation	9
21	Lineare und zyklische Faltung	9
22	Faltung kontinuierlicher Signale	10
23	Laplace-Transformation	10
24	Laplace-Transformation	10
25	Symmetriebeziehungen von z- und Laplace-Transformation	10
26	z-Transformation	11
27	Inverse z-Transformation	11
28	Inverse z-Transformation, Partialbruchzerlegung	11
29	Laplace-Transformation, Impuls- und Sprungantwort	12
30	Impuls- und Sprungantwort	12
31	Laplace-Transformation, Pol-/Nullstellendiagramm	12
32	Impuls- und Sprungantwort	13
33	Pol-/Nullstellendiagramm	14

1 Aufgaben

1 Signalleistung und -energie, Variablenormierung

An einen ohmschen Widerstand von $R = 2 \Omega$ wird die Spannung

$$u(t) = \begin{cases} 1 \frac{V}{s} t & , \quad 0 \leq t \leq 3s \\ 0 V & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

angelegt. Berechnen Sie sowohl die Leistung als auch Energie, die in diesem Widerstand umgesetzt wird

- (a) ohne Variablenormierung
- (b) mit Variablenormierung.

2 Systemeigenschaften zeitkontinuierlicher Systeme

Nachfolgend sind mehrere zeitkontinuierliche Systeme, beschrieben durch die Reaktion $y(t)$ auf die Eingangsfunktion $v(t)$, gegeben. Überprüfen Sie jeweils, ob diese Systeme linear, verschiebungsinvariant, kausal und stabil sind.

- (a) $y(t) = v^2(t)$
- (b) $y(t) = \frac{d}{dt} v(t)$
- (c) $y(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau$
- (d) $y(t) = v(t) \cdot \sin(\omega_0 t)$
- (e) $y(t) = v(t) \cdot r_p(t)$, mit $r_p(t)$ siehe Abbildung 1.

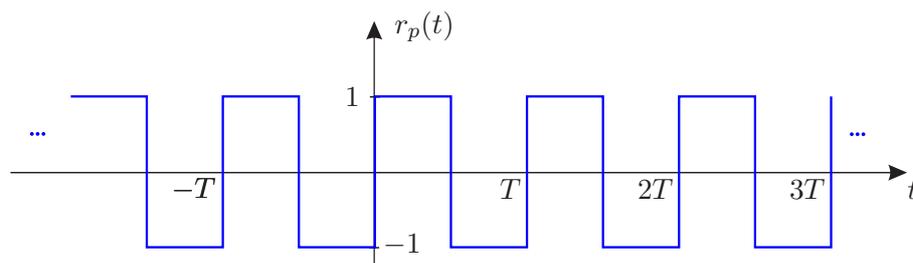


Abbildung 1: Signal zu Aufgabe 2 (e).

- (f) $y(t) = |v(t)|$
- (g) $y(t) = \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau$

3 Systemeigenschaften zeitdiskreter Systeme

Nachfolgend sind mehrere zeitdiskrete Systeme, beschrieben durch die Reaktion $y(n)$ auf die Eingangsfunktion $v(n)$, gegeben. Überprüfen Sie jeweils, ob diese Systeme linear, verschiebungsinvariant, kausal und stabil sind.

$$(a) \quad y(n) = v^2(n)$$

$$(b) \quad y(n) = v(n) \cdot \sin(\Omega_0 n)$$

$$(c) \quad y(n) = \sum_{\mu=0}^n v(\mu), \quad n \in \mathbb{N}^+$$

$$(d) \quad y(n) = v(n - N), \quad N \in \mathbb{Z}$$

4 Systemeigenschaften zeitkontinuierlicher Systeme

Gegeben ist ein System, beschrieben durch die Reaktion $y(t)$ auf das Eingangssignal $v(t)$:

$$y(t) = \cos(\omega_0 \cdot v(t)).$$

Untersuchen Sie, ob das System linear, verschiebungsinvariant, kausal und stabil ist.

5 Periodizität kontinuierlicher Signale

Überprüfen Sie die folgenden Zeitsignale auf Periodizität.

$$(a) \quad v(t) = \sin(\omega_0 t) \cdot \cos(\sqrt{2} \omega_0 t)$$

$$(b) \quad v(t) = \sin(\omega_0 t) \cdot \cos(\sqrt{2} \omega_0 t) - \frac{\tan(\frac{1+\sqrt{2}}{2} \omega_0 t)}{1 + \tan^2(\frac{1+\sqrt{2}}{2} \omega_0 t)}$$

$$(c) \quad v(t) = \sin(\omega_0 t) \cdot \cos(\sqrt{2} \omega_0 t) + \cos(\omega_0 t) \cdot \sin(\sqrt{2} \omega_0 t)$$

$$(d) \quad v(t) = \sum_{n=1}^5 \sin(\sqrt{n} \omega_0 t)$$

6 Abtastung, Periodizität diskreter Signale

Ein mit T_0 periodisches Signal $v_0(t)$ werde mit der Rate $f_A = 1/T_A$ abgetastet. Welchen Bedingungen muss $\alpha = T_0/T_A$ genügen, damit auch die Folge $v(n)$ periodisch ist?

7 Periodizität diskreter Signale

Das Signal $v_0(t) = \sin(\omega_0 t)$ mit $\omega_0 = 2\pi/T_0$ werde mit $T_A = T_0/\alpha$ abgetastet. Überprüfen Sie für die folgenden Fälle, ob $v(n)$ periodisch ist, und geben Sie gegebenenfalls die Periodendauer K an.

- (a) $\alpha = 5$
- (b) $\alpha = 5.5$
- (c) $\alpha = \frac{16}{3}$
- (d) $\alpha = \pi$
- (e) $\alpha = 1$

8 Periodizität diskreter Signale

Gegeben ist das mit T periodische Signal $v_0(t) = \cos(\omega_0 t) \cdot \cos(2\omega_0 t)$. Durch Abtastung mit der Abtastperiode $T_A = \frac{T}{4}$ entsteht die Folge $v(n) = v_0(n \cdot T_A)$.

- (a) Geben Sie die Periode T von $v_0(t)$ an.
- (b) Geben Sie die Periode K der Folge $v(n)$ an.

Geben Sie jeweils eine Herleitung/Begründung an.

9 Fourier-Reihe

Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten c_μ der folgenden Signale:

- (a) $v_D(t) = \begin{cases} -\frac{2}{T} t, & -\frac{T}{2} \leq t < 0 \\ \frac{2}{T} t, & 0 \leq t < \frac{T}{2} \end{cases}$ mit $v_D(t) = v_D(t + \lambda T)$, $\lambda \in \mathbb{Z}$
- (b) $v_R(t) = \begin{cases} k, & 0 < t \leq \frac{T}{2} \\ -k, & \frac{T}{2} < t \leq T \end{cases}$ mit $v_R(t) = v_R(t + \lambda T)$, $k \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{Z}$
- (c) $v(t)$ siehe Abbildung 2:

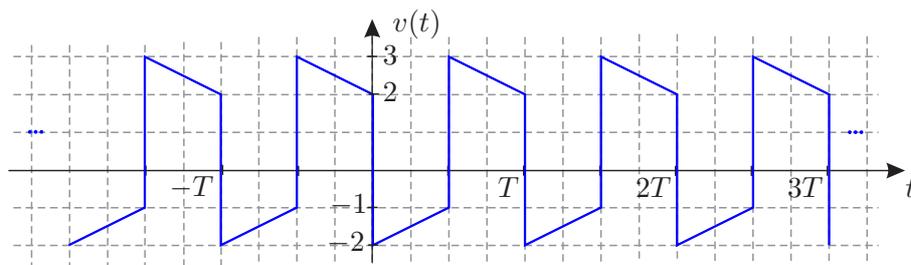


Abbildung 2: Signal zu Aufgabe 9.

10 Fourier-Reihe

Gegeben ist das periodische Signal $v(t)$ wie in Abbildung 3 skizziert.

Bestimmen Sie die Fourier-Reihenoeffizienten c_μ des Signals $v(t)$ einschließlich des Gleichanteils c_0 .

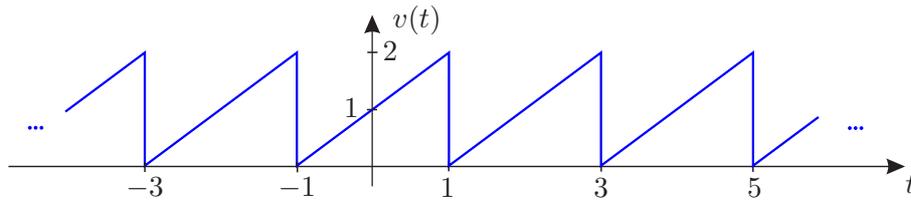


Abbildung 3: Signal zu Aufgabe 10.

11 Diskrete Fourier-Transformation

Berechnen Sie die DFT (Diskrete Fourier-Transformation) der unten angegebenen Folgen $v(n)$ der Länge M :

- (a) $v(n) = \gamma_0(n - \kappa) \quad \kappa \in \{0, 1, \dots, M - 1\}$
- (b) $v(n) = \cos(\Omega_0 n) \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{M}\mu_0, \quad \mu_0 \in \{1, 2, \dots, M - 1\}$
- (c) $v(n) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq n \leq l - 1 \\ 0 & , \quad l \leq n \leq M - 1 \end{cases} \quad l \in \{1, 2, \dots, M - 1\}$

12 Fourier-Reihe, Abtastung, diskrete Fourier-Transformation

Gegeben ist das kontinuierliche Signal $v_0(t) = \cos^2\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$.

- (a) Geben Sie die Fourierreihen-Koeffizienten von $v_0(t)$ an.

Die Folge $v(n)$ entsteht nun durch Abtastung des Signals $v_0(t)$. Die Abtastperiode ist dabei $T_A = T/4$.

- (b) Ist das Abtasttheorem erfüllt?
- (c) Geben Sie die DFT $V_M(\mu)$ der Folge $v(n)$ an. Benutzen Sie dabei die Definitionsgleichung der DFT mit der Größe $M = 4$.
- (d) Bestimmen Sie jetzt die DFT anhand des Überlagerungssatzes der DFT.

13 Diskrete Fourier-Transformation

Gegeben ist die Folge

$$v(n) = 3 \cos(\Omega_0 n) + 2 \sin(\Omega_0 n),$$

wobei $\Omega_0 = \frac{2\pi}{M}\mu_0$ und $\mu_0 \in \{1, 2, \dots, M - 1\}$. Bestimmen Sie die diskrete Fourier-Transformation $V_M(\mu) = \text{DFT}\{v(n)\}$ der Länge M .

14 Fourier-Transformation zeitkontinuierlicher Signale

Bestimmen Sie die Fourier-Transformierten der folgenden kontinuierlichen Signale.

$$(a) v(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq T \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$(b) v(t) = \frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0 t}$$

$$(c) v(t) = e^{-\alpha t} \cdot \delta_{-1}(t)$$

$$(d) v(t) = \cos(\omega_0 t)$$

(e) $v(t)$ wie in der Abbildung 4 gegeben.

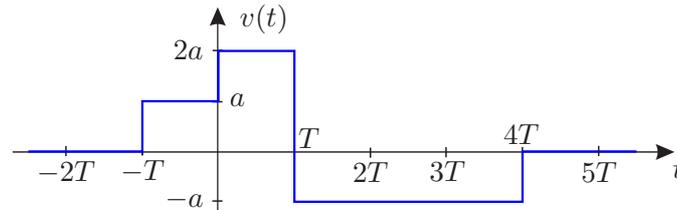


Abbildung 4: Signal zu Aufgabe 14 (e)

Hinweis: Verwenden Sie für (b) den Symmetriesatz, für (d) den Modulationssatz und für (e) den Differentiationssatz.

15 Fourier-Transformation zeitdiskreter Signale

Bestimmen Sie die Fourier-Transformierten der folgenden zeitdiskreten Signale.

$$(a) v(n) = \begin{cases} 1, & |n| \leq N \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$(b) v(n) = e^{-\alpha n} \cdot \gamma_{-1}(n)$$

$$(c) v(n) = \begin{cases} 1 - \frac{|n|}{N}, & |n| \leq N \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

16 Fourier-Transformation

Das Wahrzeichen Darmstadts ist der in Abbildung 5 dargestellte Hochzeitsturm. Aufgrund seiner Form wird der 48 Meter hohe Backsteinturm auch Fünffingerturm genannt und eignet sich zudem hervorragend dazu, einer mathematischen Umformung unterzogen zu werden.

Berechnen Sie die Fouriertransformierte $V(j\omega)$ der Frontansicht dieses imposanten Bauwerks, indem Sie $v(t)$ aus geeigneten Teilfunktionen zusammensetzen und Sätze der Fourier-Transformation anwenden. Die Spitzen werden dabei als parabelförmig angenommen.

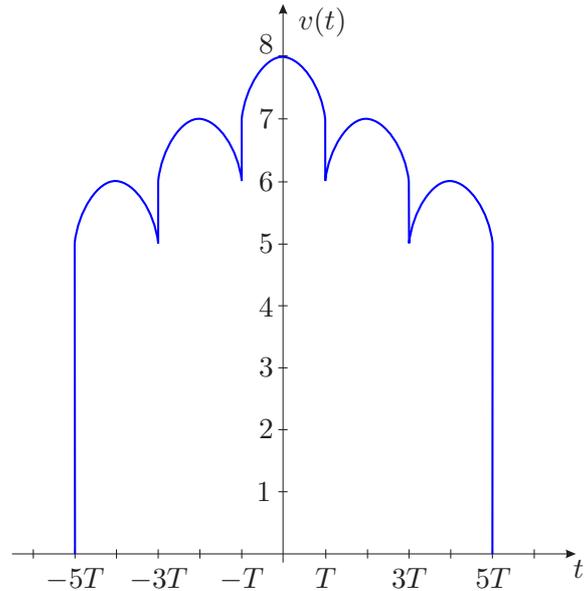


Abbildung 5: Der Darmstädter Hochzeitsturm zu Aufgabe 16.

17 Diskrete Fourier-Transformation

Gegeben ist die DFT

$$V_M(\mu) = \{1, 2, 0, 2, 0, 1\}$$

mit $M = 6$. Bestimmen Sie die inverse DFT $v(n) = \text{IDFT}\{V_M(\mu)\}$.

Hinweis: $e^{j\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$e^{j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$e^{j\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$e^{j\frac{5\pi}{3}} = \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

18 Faltung kontinuierlicher Signale

Berechnen Sie die Faltungsintegrale $v(t) = v_1(t) * v_2(t)$ der folgenden Funktionen:

$$(a) \quad v_1(t) = \begin{cases} 1 & , \quad -T_1 \leq t \leq T_1 \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

$$v_2(t) = \begin{cases} 1 & , \quad -T_2 \leq t \leq T_2 \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases} \quad (T_1 \geq T_2)$$

$$(b) \quad v_1(t) = e^{-at} \cdot \delta_{-1}(t) \quad , \quad \text{mit } a > 0$$

$$v_2(t) = e^{-bt} \cdot \delta_{-1}(t) \quad , \quad \text{mit } b > 0$$

- (c) $v_1(t) = \delta_0(t - t_0)$
 $v_2(t) = x(t)$ (eine beliebige Funktion)

19 Faltung diskreter Signale

Berechnen Sie das Faltungsprodukt $v(n) = v_1(n) * v_2(n)$ der beiden Folgen $v_1(n)$ und $v_2(n)$:

$$v_1(n) = \rho_1^n \cdot \gamma_{-1}(n) \quad , \text{ mit } 0 < \rho_1 < 1$$

$$v_2(n) = \rho_2^n \cdot \gamma_{-1}(n) \quad , \text{ mit } 0 < \rho_2 < 1$$

20 Fourier-Transformation

Gegeben ist das Signal $v(t)$ wie in Abbildung 6 skizziert. Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte $V(j\omega)$ des Signals $v(t)$.

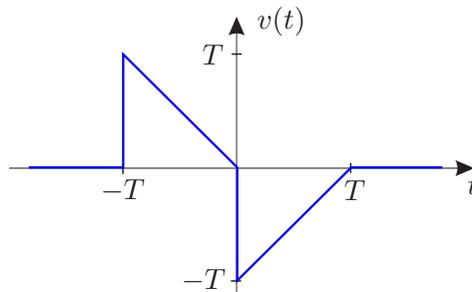


Abbildung 6: Signal zu Aufgabe 20.

21 Lineare und zyklische Faltung

Gegeben sind die zwei auf $M = 5$ Werte beschränkten Folgen $v_1(n)$ und $v_2(n)$ mit

$$v_1(n) = \{5, 4, 3, 2, 1\}$$

$$v_2(n) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

- (a) Berechnen Sie die **lineare Faltung** $v_1(n)$ der beiden Folgen $v_1(n)$ und $v_2(n)$.
 (b) Berechnen Sie die **zyklische Faltung** $v_z(n)$ der Länge 5 der beiden Folgen $v_1(n)$ und $v_2(n)$.
 (c) Wie kann die lineare Faltung mit Hilfe der zyklischen Faltung berechnet werden?
 (d) Wie kann die zyklische Faltung effizient berechnet werden?

22 Faltung kontinuierlicher Signale

Gegeben sind die beiden in Abbildung 7 dargestellten Signale $v_1(t)$ und $v_2(t)$. Bestimmen Sie die Faltung $y(t) = v_1(t) * v_2(t)$ und skizzieren Sie $y(t)$.

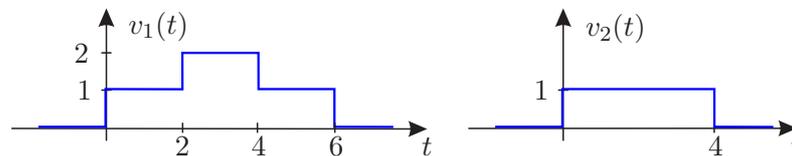


Abbildung 7: Signale zu Aufgabe 22.

23 Laplace-Transformation

Bestimmen Sie die Laplacetransformierte $V(s) = \mathcal{L}\{v(t)\}$ der folgenden Signale und geben Sie jeweils das Konvergenzgebiet an:

$$(a) v(t) = \begin{cases} 1 & , |t| < T \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

$$(b) v(t) = \begin{cases} e^{at} & , t \geq 0 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} \quad (a \in \mathbb{R})$$

$$(c) v(t) = \begin{cases} t e^{at} & , t \geq 0 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} \quad (a \in \mathbb{R})$$

24 Laplace-Transformation

Gegeben ist folgendes Signal:

$$v(t) = e^{a|t|}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie die Laplace-Transformierte von $v(t)$. Betrachten Sie dazu die Konvergenz für die beiden Fälle:

$$(a) a < 0$$

$$(b) a > 0$$

Skizzieren Sie das Konvergenzgebiet in der s -Ebene falls Konvergenz vorliegt.

25 Symmetriebeziehungen von z - und Laplace-Transformation

Gegeben sei die Folge $v(n)$ mit ihrer z -Transformierten $V(z)$. Berechnen Sie die z -Transformierte der folgenden Folgen in Abhängigkeit von $V(z)$:

$$(a) v_1(n) = v(-n)$$

$$(b) v_2(n) = v^*(n)$$

$$(c) v_3(n) = \frac{1}{2}[v(n) + v(-n)]$$

Setzen Sie die Ergebnisse in Zusammenhang mit den bekannten Symmetriebeziehungen der Laplacetransformation.

26 z-Transformation

Bestimmen Sie die z-Transformierten der Folgen

$$(a) v(n) = \begin{cases} 1 & , |n| \leq N \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

(b) $v(n)$ wie in der Abbildung 8 definiert.

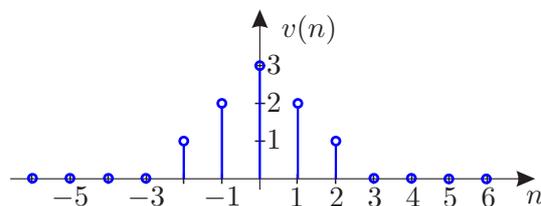


Abbildung 8: Signal zu Aufgabe 26.

27 Inverse z-Transformation

Bestimmen Sie die Rücktransformierten $v_\kappa(n)$ der z-Transformierten

$$V_\kappa(z) = \frac{z^\lambda}{(z - z_\infty)^{\kappa+1}}$$

explizit für $\lambda = 1$ und $\kappa \in \{0, 1, 2\}$. Verwenden Sie dazu die aus der Vorlesung bekannte Korrespondenz

$$\binom{n + \lambda - 1}{\kappa} z_\infty^{n+\lambda-\kappa-1} \cdot \gamma_{-1}(n + \lambda - \kappa - 1) \bullet \circ \frac{z^\lambda}{(z - z_\infty)^{\kappa+1}} \quad , |z| > |z_\infty|.$$

28 Inverse z-Transformation, Partialbruchzerlegung

Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$H(z) = \frac{Y(z)}{V(z)} = \frac{23z^3 - 34z^2 - 28z + 56}{z^5 - 5z^4 + 6z^3 + 4z^2 - 8z}.$$

eines zeitdiskreten LTI-Systems. Hierbei sind $V(z)$ und $Y(z)$ die z-Transformierten der Eingangs- bzw. Ausgangsfolgen des Systems.

(a) Welche Beziehung besteht zwischen den beiden Folgen $y(n)$ und $v(n)$ im Zeitbereich?

-
- (b) Bestimmen Sie die Impulsantwort $h_0(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\}$ mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung.

29 Laplace-Transformation, Impuls- und Sprungantwort

Gegeben sei ein System mit der Impulsantwort

$$h_0(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ \frac{t}{T} & , 0 \leq t < T \\ 2 - \frac{t}{T} & , T \leq t < 2T \\ 0 & , t \geq 2T. \end{cases}$$

- (a) Bestimmen Sie die Laplacetransformierte $H_0(s) = \mathcal{L}\{h_0(t)\}$ der Impulsantwort.
- (b) Bestimmen Sie die Sprungantwort $h_{-1}(t)$.
- (c) Bestimmen Sie die Laplacetransformierte $H_{-1}(s) = \mathcal{L}\{h_{-1}(t)\}$ der Sprungantwort.

30 Impuls- und Sprungantwort

Gegeben ist das folgende System, beschrieben durch die Systemantwort $y(t)$ auf die Systemanregung $v(t)$:

$$y(t) = S\{v(t)\} = \int_{-\infty}^t v(\tau) e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau,$$

wobei $\alpha > 0$ gelte.

- (a) Bestimmen Sie die Impulsantwort $h_0(t) = S\{\delta_0(t)\}$ des Systems und skizzieren Sie diese.
- (b) Bestimmen Sie die Sprungantwort $h_{-1}(t) = S\{\delta_{-1}(t)\}$ des Systems und skizzieren Sie diese.
- (c) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Laplace-Transformierten $H_0(s)$ und $H_{-1}(s)$ von Impuls- und Sprungantwort?

31 Laplace-Transformation, Pol-/Nullstellendiagramm

Bekannt seien die Pol- und Nullstellen des Systems mit der Übertragungsfunktion $H_1(s)$ wie in Abbildung 9 dargestellt.

- (a) Ergänzen Sie (eine minimale Anzahl) Polstellen (\times) und Nullstellen (\circ), so dass $H_1(s)$ reellwertig ist und zeichnen Sie das resultierende Pol-/Nullstellendiagramm.
- (b) Wie lautet die Übertragungsfunktion $H_1(s)$ des reellwertigen Systems?
Es gelte: $H_1(s=1) = 1$.
- (c) Ist das so bestimmte System stabil (Begründung)?

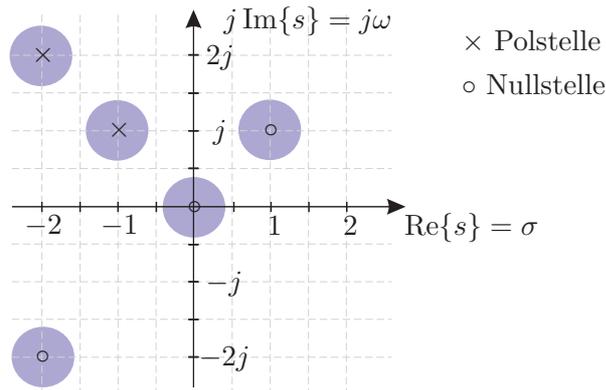


Abbildung 9: Pol-/Nullstellendiagramm zu Aufgabe 31.

Das System werde nun in Reihe geschaltet mit einem zweiten System mit der Übertragungsfunktion $H_2(s)$, dessen Sprungantwort

$$h_{-1,2}(t) = t \cdot \delta_{-1}(t)$$

bekannt sei. Das Blockdiagramm des auf diese Weise erzeugten Systems ist in Abbildung 10 dargestellt.

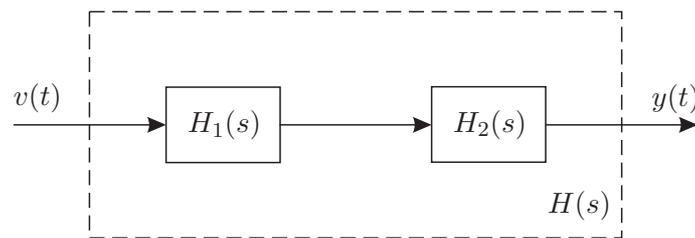


Abbildung 10: Blockschaltbild zu Aufgabe 31 (d) und (e).

- (d) Wie lautet die Übertragungsfunktion $H(s)$ des Gesamtsystems?
- (e) Was für ein System stellt $H(s)$ dar? Geben Sie seinen Betragsfrequenzgang $|H(j\omega)|$ ohne zu rechnen an.

32 Impuls- und Sprungantwort

Geben Sie zu den beiden folgenden Systemen jeweils die Impuls- und die Sprungantwort an!

(a)
$$y(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} v(n-k)$$

(b)
$$y(t) = \int_{t-T}^t v(\tau) d\tau$$

33 Pol-/Nullstellendiagramm

Die Impulsantwort $h_0(t)$ und die Sprungantwort $h_{-1}(t)$ eines Systems mit der Übertragungsfunktion $H(s)$ sind bekannt, siehe Abbildung 11.

Welche der in Abbildung 12 angegebenen Pol-/Nullstellendiagramme können prinzipiell zu $H(s)$ gehören, welche nicht? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: Verwenden Sie die Grenzwertsätze der Laplace-Transformation.

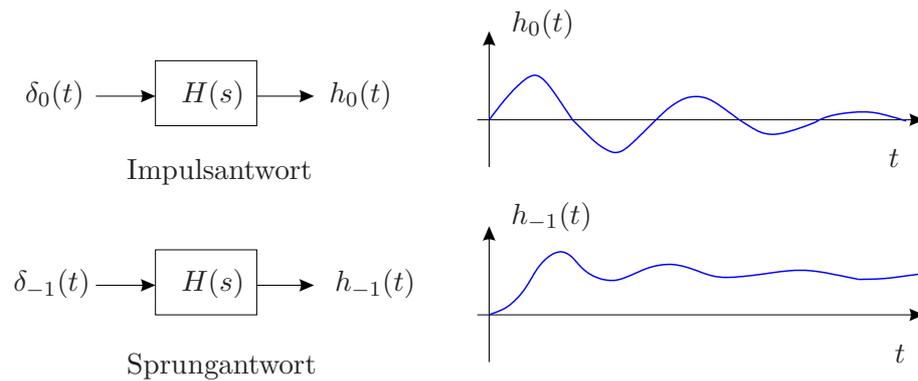


Abbildung 11: Impulsantwort und Sprungantwort des Systems aus Aufgabe 33.

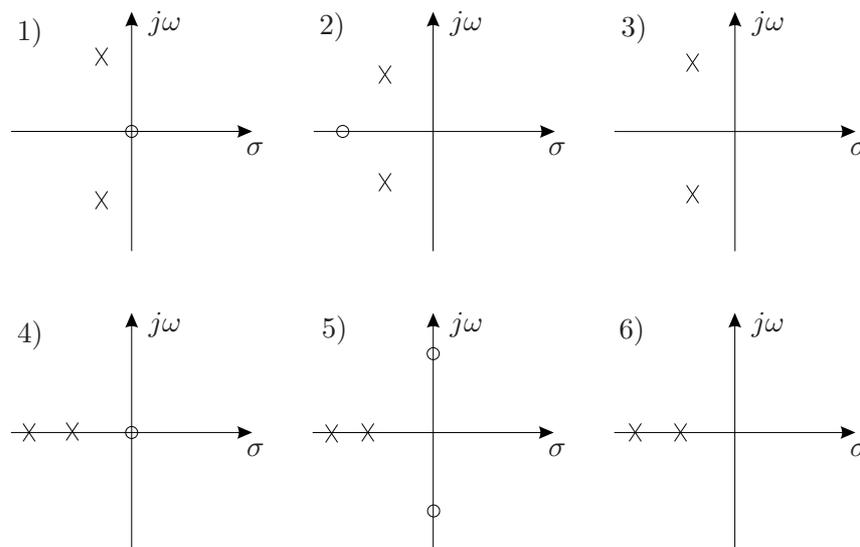


Abbildung 12: Pol-Nullstellen-Diagramme (s-Ebene) zu Aufgabe 33.