

Signale und Systeme I

Formelsammlung v2.6

Inhaltsverzeichnis

1	Mathematische Formeln	2
1.1	Trigonometrische Funktionen	2
1.2	Integrations- und Differentiationsregeln	2
1.3	Unbestimmte Integrale	2
1.4	Rechnen mit komplexen Exponentialfunktionen	3
1.5	Summen und Reihen	3
1.6	Verschiedenes	3
2	Fourier-Reihe	4
2.1	Fourier Sinus-/Cosinus-Reihe (Trigonometrische Fourier-Reihe)	4
3	Fourier-Transformation	5
3.1	Eigenschaften	5
3.2	Gebräuchliche Korrespondenzen	6
4	Diskrete Fourier-Transformation (DFT)	7
4.1	Eigenschaften	7
5	Zeitdiskrete Fourier-Transformation (DTFT)	8
5.1	Eigenschaften	8
5.2	Gebräuchliche Korrespondenzen	9
6	Laplace-Transformation	10
6.1	Eigenschaften	10
6.2	Gebräuchliche Korrespondenzen	11
7	Z-Transformation	12
7.1	Eigenschaften	12
7.2	Gebräuchliche Korrespondenzen	12

1 Mathematische Formeln

1.1 Trigonometrische Funktionen

x	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\cot(x)$	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\pm\infty$

$$\begin{aligned}
 \sin(x) \cdot \sin(y) &= \frac{1}{2} [\cos(x-y) - \cos(x+y)] & \tan(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\
 \sin(x) \cdot \cos(y) &= \frac{1}{2} [\sin(x-y) + \sin(x+y)] & 1 &= \cos^2(x) + \sin^2(x) \\
 \cos(x) \cdot \cos(y) &= \frac{1}{2} [\cos(x-y) + \cos(x+y)] & \cos^2(x) &= \frac{1}{2} [1 + \cos(2x)] \\
 \sin(x) + \sin(y) &= 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) & \sin^2(x) &= \frac{1}{2} [1 - \cos(2x)] \\
 \cos(x) + \cos(y) &= 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) & \cos(x) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) \\
 \cos(x) - \cos(y) &= -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) & \sin(x) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)
 \end{aligned}$$

1.2 Integrations- und Differentiationsregeln

$$\begin{aligned}
 \text{Produktregel} & \quad (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \\
 \text{Quotientenregel} & \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \\
 \text{Kettenregel} & \quad \left(y(x(t))\right)' = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = y'(x(t)) \cdot x'(t) \\
 \text{Partielle Integration} & \quad \int u' v \, dx = u v - \int u v' \, dx
 \end{aligned}$$

1.3 Unbestimmte Integrale

Hinweis: Die Integrationskonstante C für die Stammfunktionen auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens wurde weggelassen.

$$\begin{aligned}
 \int x e^{\alpha x} \, dx &= \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2} (\alpha x - 1) \\
 \int x^2 e^{\alpha x} \, dx &= e^{\alpha x} \left(\frac{x^2}{\alpha} - \frac{2x}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha^3} \right) \\
 \int x \cos(\omega x) \, dx &= \frac{\cos(\omega x)}{\omega^2} + \frac{x \sin(\omega x)}{\omega} \\
 \int x \sin(\omega x) \, dx &= \frac{\sin(\omega x)}{\omega^2} - \frac{x \cos(\omega x)}{\omega}
 \end{aligned}$$

$$\int x^2 \cos(\omega x) dx = \frac{2x}{\omega^2} \cos(\omega x) + \left(\frac{x^2}{\omega} - \frac{2}{\omega^3} \right) \sin(\omega x)$$

$$\int x^2 \sin(\omega x) dx = \frac{2x}{\omega^2} \sin(\omega x) + \left(\frac{x^2}{\omega} - \frac{2}{\omega^3} \right) \cos(\omega x)$$

$$\int e^{ax} \cos(bx) dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} [a \cos(bx) + b \sin(bx)]$$

$$\int e^{ax} \sin(bx) dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} [a \sin(bx) - b \cos(bx)]$$

1.4 Rechnen mit komplexen Exponentialfunktionen

Eulersche Formel $e^{jx} = \cos(x) + j \sin(x)$

$$\cos(x) = \frac{1}{2} (e^{jx} + e^{-jx})$$

$$\sin(x) = \frac{1}{2j} (e^{jx} - e^{-jx})$$

„Halbes Argument ausklammern“ $1 - e^{-jx} = e^{-jx/2} (e^{jx/2} - e^{-jx/2})$

$$= 2j e^{-jx/2} \sin(x/2)$$

1.5 Summen und Reihen

Geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \quad \text{für } |q| < 1$

Endliche geometrische Reihe $\sum_{n=0}^N q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}, \quad \text{für } q \neq 1$

Gaußsche Summenformel $\sum_{n=1}^N n = \frac{N}{2}(N+1)$

1.6 Verschiedenes

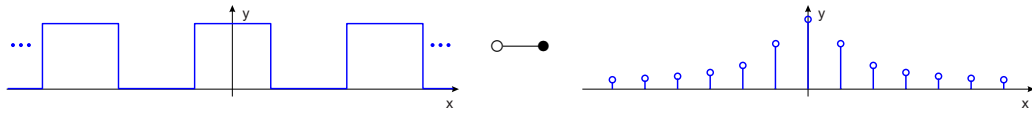
Binomialkoeffizient $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad \text{für } n \geq k \geq 0$

Quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

Umrechnen von Logarithmen $\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$

2 Fourier-Reihe

Das Signal $v(t) = v(t + \lambda T)$ sei periodisch mit Periodendauer $T \in \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{Z}$.



$$v(t) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} c_{\mu} e^{j\mu \frac{2\pi}{T} t}$$

$$c_{\mu} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v(t) e^{-j\mu \frac{2\pi}{T} t} dt$$

2.1 Fourier Sinus-/Cosinus-Reihe (Trigonometrische Fourier-Reihe)

$$v(t) = c_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} a_{\mu} \cos\left(\mu \frac{2\pi}{T} t\right) + \sum_{\mu=1}^{\infty} b_{\mu} \sin\left(\mu \frac{2\pi}{T} t\right)$$

Berechnung der Koeffizienten

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v(t) dt$$

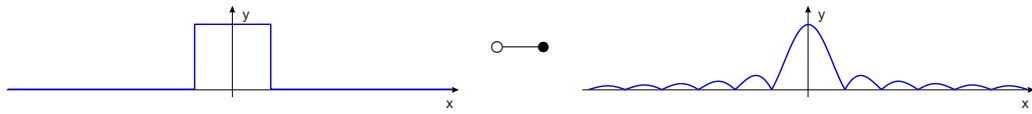
$$a_{\mu} = 2 \operatorname{Re} \{c_{\mu}\} = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v(t) \cos\left(\mu \frac{2\pi}{T} t\right) dt$$

$$b_{\mu} = -2 \operatorname{Im} \{c_{\mu}\} = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v(t) \sin\left(\mu \frac{2\pi}{T} t\right) dt$$

Beziehung zur komplexen Fourier-Reihe

$$c_{\mu} = \frac{1}{2} (a_{\mu} - j b_{\mu}), \quad c_{-\mu} = c_{\mu}^* \text{ für } \mu \in \{1, \dots, \infty\}$$
$$c_0 = \frac{a_0}{2}$$

3 Fourier-Transformation



$$v(t) = \mathcal{F}^{-1} \{V(j\omega)\} \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$V(j\omega) = \mathcal{F} \{v(t)\} \\ = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{-j\omega t} dt$$

3.1 Eigenschaften

Linearität	$a_1 v_1(t) + a_2 v_2(t)$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$a_1 V_1(j\omega) + a_2 V_2(j\omega)$
Zeitverschiebung	$v(t - t_0)$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$V(j\omega) e^{-j\omega t_0}$
Modulation	$v(t) e^{j\omega_0 t}$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$V(j(\omega - \omega_0))$
Zeitskalierung	$v(at)$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$\frac{1}{ a } V\left(\frac{j\omega}{a}\right)$
Zeitumkehr	$v(-t)$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$V(-j\omega)$
Symmetrie	$X(jt)$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$2\pi v(-\omega)$
Ableitung im Zeitbereich	$\frac{d^n}{dt^n} v(t)$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$(j\omega)^n V(j\omega)$
Ableitung im Frequenzbereich	$(-jt)^n v(t)$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$\frac{d^n}{d\omega^n} V(j\omega)$
Integration	$\int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$\frac{1}{j\omega} V(j\omega) + \pi V(0) \delta_0(\omega)$
Multiplikation	$v_1(t) \cdot v_2(t)$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$\frac{1}{2\pi} V_1(j\omega) * V_2(j\omega)$
Faltung	$v_1(t) * v_2(t)$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$V_1(j\omega) \cdot V_2(j\omega)$

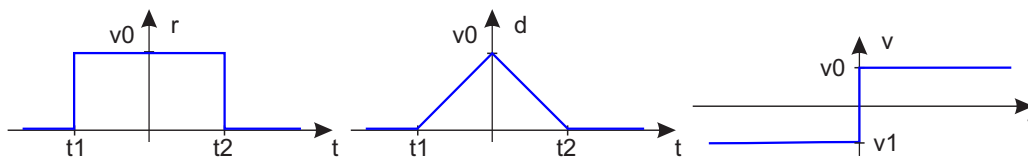
Es gilt für die Faltungsoperation

$$v_1(t) * v_2(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} v_1(\tau) v_2(t - \tau) d\tau$$

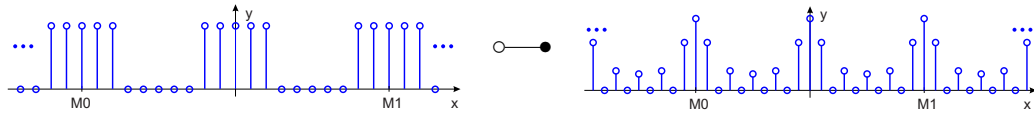
3.2 Gebräuchliche Korrespondenzen

$\delta_0(t)$	$\circ \longrightarrow \bullet$	1	
$\delta_{-1}(t)$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta_0(\omega)$	
$e^{-at}\delta_{-1}(t)$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$\frac{1}{a+j\omega}$	$a > 0$
$e^{at}\delta_{-1}(-t)$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$\frac{1}{a-j\omega}$	$a > 0$
$t^n e^{-at}\delta_{-1}(t)$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$\frac{n!}{(a+j\omega)^{n+1}}$	$a > 0$
$e^{-at}\cos(\omega_0 t)\delta_{-1}(t)$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$\frac{a+j\omega}{(a+j\omega)^2+\omega_0^2}$	$a > 0$
$e^{-at}\sin(\omega_0 t)\delta_{-1}(t)$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$\frac{\omega_0}{(a+j\omega)^2+\omega_0^2}$	$a > 0$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_0(t-nT)$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$\frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_0\left(\omega - \frac{2\pi}{T}n\right)$	
$\cos(\omega_0 t)$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$\pi [\delta_0(\omega + \omega_0) + \delta_0(\omega - \omega_0)]$	
$\sin(\omega_0 t)$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$j\pi [\delta_0(\omega + \omega_0) - \delta_0(\omega - \omega_0)]$	
$\cos(\omega_0 t)\delta_{-1}(t)$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$\frac{\pi}{2} [\delta_0(\omega + \omega_0) + \delta_0(\omega - \omega_0)] + \frac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$	
$\sin(\omega_0 t)\delta_{-1}(t)$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$\frac{j\pi}{2} [\delta_0(\omega + \omega_0) - \delta_0(\omega - \omega_0)] + \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$	
$ t $	$\circ \longrightarrow \bullet$	$-\frac{2}{\omega^2}$	
$e^{j\omega_0 t}$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$2\pi\delta_0(\omega - \omega_0)$	
$e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$\sigma\sqrt{2\pi}e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}$	
$r_T(t)$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$\frac{2}{\omega} \sin(\omega T) = 2T\text{si}(\omega T)$	
$d_T(t)$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$T\text{si}^2\left(\frac{T\omega}{2}\right)$	
$\text{sign}(t)$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$\frac{2}{j\omega}$	

Definition einiger verwendeter Funktionen:



4 Diskrete Fourier-Transformation (DFT)



$$v(n) = \text{IDFT}_M \{V_M(\mu)\}$$

$$= \frac{1}{M} \sum_{\mu=0}^{M-1} V_M(\mu) e^{j\mu \frac{2\pi}{M} n}$$

$$V_M(\mu) = \text{DFT}_M \{v(n)\}$$

$$= \sum_{n=0}^{M-1} v(n) e^{-j\mu \frac{2\pi}{M} n}$$

4.1 Eigenschaften

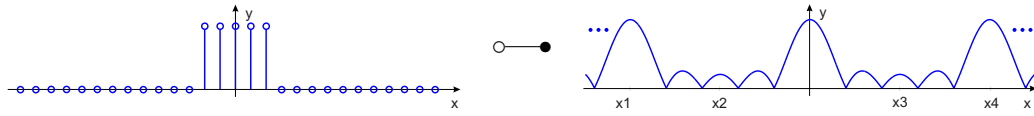
Linearität	$a_1 v_1(n) + a_2 v_2(n)$	$\circ \rightarrow \bullet$	$a_1 V_{1M}(\mu) + a_2 V_{2M}(\mu)$
Zeitverschiebung	$v(n - n_0)$	$\circ \rightarrow \bullet$	$V_M(\mu) e^{-j\mu \frac{2\pi}{M} n_0}$
Modulation	$v(n) e^{j\mu_0 \frac{2\pi}{M} n}$	$\circ \rightarrow \bullet$	$V(\mu - \mu_0)$
Differenz im Zeitbereich	$v(n) - v(n - 1)$	$\circ \rightarrow \bullet$	$V_M(\mu) (1 - e^{-j\mu \frac{2\pi}{M}})$
Multiplikation	$v_1(n) \cdot v_2(n)$	$\circ \rightarrow \bullet$	$\frac{1}{M} V_{1M}(\mu) \otimes V_{2M}(\mu)$
Zyklische Faltung	$v_1(n) \otimes v_2(n)$	$\circ \rightarrow \bullet$	$V_{1M}(\mu) \cdot V_{2M}(\mu)$

Es gilt

$$v_1(n) \otimes v_2(n) = \sum_{\kappa=0}^{M-1} v_1(\kappa) v_2(n - \kappa)_{\text{mod } M}$$

$$V_{1M}(\mu) \otimes V_{2M}(\mu) = \sum_{\nu=0}^{M-1} V_{1M}(\nu) V_{2M}(\mu - \nu)_{\text{mod } M}$$

5 Zeitdiskrete Fourier-Transformation (DTFT)



$$\begin{aligned} v(n) &= \mathcal{F}^{-1} \{ V(e^{j\Omega}) \} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} V(e^{j\Omega}) e^{j\Omega n} d\Omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(e^{j\Omega}) &= \mathcal{F} \{ v(n) \} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} v(n) e^{-j\Omega n} \end{aligned}$$

5.1 Eigenschaften

Periodizität	$V(e^{j\Omega}) = V(e^{j(\Omega+2\pi k)}) \quad k \in \mathbb{Z}$
Linearität	$a_1 v_1(n) + a_2 v_2(n) \circ \bullet a_1 V_1(e^{j\Omega}) + a_2 V_2(e^{j\Omega})$
Zeitverschiebung	$v(n - n_0) \circ \bullet V(e^{j\Omega}) e^{-j\Omega n_0}$
Modulation	$v(n) e^{j\Omega_0 n} \circ \bullet V(e^{j(\Omega - \Omega_0)})$
Zeitskalierung	$v_{(m)}(n) \circ \bullet V(e^{j\Omega m}) \quad m \in \mathbb{Z}^+$
Zeitumkehr	$v(-n) \circ \bullet V(e^{-j\Omega})$
Konjugation	$v^*(n) \circ \bullet V^*(e^{-j\Omega})$
Ableitung im Frequenzbereich	$nv(n) \circ \bullet j \frac{d}{d\Omega} V(e^{j\Omega})$
Multiplikation	$v_1(n) \cdot v_2(n) \circ \bullet \frac{1}{2\pi} V_1(e^{j\Omega}) \circledast V_2(e^{j\Omega})$
Faltung	$v_1(n) * v_2(n) \circ \bullet V_1(e^{j\Omega}) \cdot V_2(e^{j\Omega})$

Es gilt

$$\begin{aligned} v_{(m)}(n) &= \begin{cases} v(n/m) & , n/m \in \mathbb{Z} \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} \\ v_1(n) * v_2(n) &= \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} v_1(\kappa) v_2(n - \kappa) \\ V_1(e^{j\Omega}) \circledast V_2(e^{j\Omega}) &= \int_{2\pi} V_1(e^{j\Omega}) V_2(e^{j(\Omega - \theta)}) d\theta \end{aligned}$$

5.2 Gebräuchliche Korrespondenzen

$$\begin{array}{ll}
 \gamma_0(n) & \circ \text{---} \bullet \quad 1 \\
 1 & \circ \text{---} \bullet \quad 2\pi \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \delta_0(\Omega - 2\pi\lambda) \\
 \gamma_{-1}(n) & \circ \text{---} \bullet \quad \frac{1}{1-e^{-j\Omega}} + j\pi \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \delta_0(\Omega - 2\pi\lambda) \\
 e^{j\Omega_0 n} & \circ \text{---} \bullet \quad 2\pi \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \delta_0(\Omega - \Omega_0 - 2\pi\lambda) \\
 \cos(\Omega_0 n) & \circ \text{---} \bullet \quad \pi \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} [\delta_0(\Omega + \Omega_0 - 2\pi\lambda) + \delta_0(\Omega - \Omega_0 - 2\pi\lambda)] \\
 \sin(\Omega_0 n) & \circ \text{---} \bullet \quad j\pi \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} [\delta_0(\Omega + \Omega_0 - 2\pi\lambda) - \delta_0(\Omega - \Omega_0 - 2\pi\lambda)] \\
 a^n \gamma_{-1}(n) & \circ \text{---} \bullet \quad \frac{1}{1-ae^{-j\Omega}} \quad |a| < 1 \\
 (n+1)a^n \gamma_{-1}(n) & \circ \text{---} \bullet \quad \frac{1}{(1-ae^{-j\Omega})^2} \quad |a| < 1 \\
 \begin{cases} 1 & , |n| \leq N_1 \\ 0 & , |n| > N_1 \end{cases} & \circ \text{---} \bullet \quad \frac{\sin(\Omega(N_1 + \frac{1}{2}))}{\sin(\Omega/2)} \\
 \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \gamma_0(n - \lambda M) & \circ \text{---} \bullet \quad 2\pi \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \delta_0(\Omega - \mu \frac{2\pi}{M})
 \end{array}$$

6 Laplace-Transformation

$$\begin{aligned}
 v(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{V(s)\} \\
 &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\substack{s=\sigma+j\omega \\ \omega=-\infty \\ \omega=\infty}}^{\infty} V(s)e^{st} ds \\
 V(s) &= \mathcal{L}\{v(t)\} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} v(t)e^{-st} dt
 \end{aligned}$$

6.1 Eigenschaften

Linearität	$a_1 v_1(t) + a_2 v_2(t)$	$\circ \text{---} \bullet$	$a_1 V_1(s) + a_2 V_2(s)$
Zeitverschiebung	$v(t - t_0)$	$\circ \text{---} \bullet$	$e^{-st_0} V(s)$
Modulation	$v(t)e^{s_0 t}$	$\circ \text{---} \bullet$	$V(s - s_0)$
Ableitung im Zeitbereich	$\frac{d}{dt} v(t)$	$\circ \text{---} \bullet$	$sV(s)$
Ableitung im Bildbereich	$(-t)v(t)$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{d}{ds} V(s)$
Integration	$\int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{1}{s} V(s)$
Multiplikation	$v_1(t) \cdot v_2(t)$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{1}{2\pi j} V_1(s) * V_2(s)$
Faltung	$v_1(t) * v_2(t)$	$\circ \text{---} \bullet$	$V_1(s) \cdot V_2(s)$

Es gilt

$$\begin{aligned}
 V_1(s) * V_2(s) &= \int_{\substack{x=\sigma+j\eta \\ \eta=-\infty \\ \eta=\infty}}^{\infty} V_1(x)V_2(s-x) dx \\
 v_1(t) * v_2(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} v_1(\tau)v_2(t-\tau) d\tau
 \end{aligned}$$

6.2 Gebräuchliche Korrespondenzen

$\delta_0(t)$	$\circ \longrightarrow \bullet$	1	$\forall s$
$\delta_{-1}(t)$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$\frac{1}{s}$	$\operatorname{Re}\{s\} > 0$
$t^k \delta_{-1}(t)$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$\frac{k!}{s^{k+1}}$	$\operatorname{Re}\{s\} > 0, k \in \mathbb{N}_0$
$-\delta_{-1}(-t)$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$\frac{1}{s}$	$\operatorname{Re}\{s\} < 0$
$e^{s_\infty t} \delta_{-1}(t)$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$\frac{1}{s-s_\infty}$	$\operatorname{Re}\{s\} > \operatorname{Re}\{s_\infty\}$
$t e^{s_\infty t} \delta_{-1}(t)$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$\frac{1}{(s-s_\infty)^2}$	$\operatorname{Re}\{s\} > \operatorname{Re}\{s_\infty\}$
$t^k e^{s_\infty t} \delta_{-1}(t)$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$\frac{k!}{(s-s_\infty)^{k+1}}$	$\operatorname{Re}\{s\} > \operatorname{Re}\{s_\infty\}, k \in \mathbb{N}_0$
$e^{s_\infty t} [1 + s_\infty t] \delta_{-1}(t)$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$\frac{s}{(s-s_\infty)^2}$	$\operatorname{Re}\{s\} > \operatorname{Re}\{s_\infty\}$
$\cos(\omega_0 t - \varphi) \delta_{-1}(t)$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$\frac{s \cos(\varphi) + \omega_0 \sin(\varphi)}{s^2 + \omega_0^2}$	$\operatorname{Re}\{s\} > 0$
$\cos(\omega_0 t) \delta_{-1}(t)$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$	$\operatorname{Re}\{s\} > 0$
$\sin(\omega_0 t) \delta_{-1}(t)$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$	$\operatorname{Re}\{s\} > 0$

Gebrochen-rationale Funktionen

$$B_0 + \sum_{\nu=1}^{k_0} \sum_{\kappa=1}^{k_\nu} \frac{B_{\nu,\kappa}}{(s-s_{\infty,\nu})^\kappa} \circ \longrightarrow B_0 \delta_0(t) + \sum_{\nu=1}^{k_0} \sum_{\kappa=1}^{k_\nu} B_{\nu,\kappa} e^{s_{\infty,\nu} t} \delta_{-\kappa}(t)$$

$$B_0 \delta_0(t) + \sum_{\nu=1}^{k_0} \sum_{\kappa=1}^{k_\nu} B_{\nu,\kappa} e^{s_{\infty,\nu} t} \frac{t^{\kappa-1}}{(\kappa-1)!} \delta_{-1}(t)$$

Für $\operatorname{Re}\{s\} > \max \left\{ \operatorname{Re}\{s_{\infty,\nu}\} \right\}$.

7 Z-Transformation

$$\begin{aligned}
 v(n) &= \mathcal{Z}^{-1} \{V(z)\} & V(z) &= \mathcal{Z} \{v(n)\} \\
 &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\text{um } 0}^{\text{Geschl. Weg}} V(z) z^{n-1} dz & &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} v(n) z^{-n}
 \end{aligned}$$

7.1 Eigenschaften

Linearität	$a_1 v_1(n) + a_2 v_2(n)$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$a_1 V_1(z) + a_2 V_2(z)$
Zeitverschiebung	$v(n - n_0)$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$z^{-n_0} V(z)$
Modulation	$v(n) z_0^n$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$V\left(\frac{z}{z_0}\right)$
Differenz im Zeitbereich	$v(n) - v(n - 1)$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$V(z)[1 - z^{-1}]$
Ableitung im Bildbereich	$(-n)v(n)$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$z \frac{d}{dz} V(z)$
Summation	$\sum_{\kappa=-\infty}^n v(\kappa)$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$\frac{V(z)}{1 - z^{-1}}$
Multiplikation	$v_1(t) \cdot v_2(t)$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\eta} V_1(\eta) V_2\left(\frac{z}{\eta}\right) \frac{d\eta}{\eta}$
Faltung	$v_1(n) * v_2(n)$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$V_1(z) \cdot V_2(z)$

Es gilt

$$v_1(n) * v_2(n) = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} v_1(\kappa) v_2(n - \kappa)$$

7.2 Gebräuchliche Korrespondenzen

$\gamma_0(n)$	$\circ \longrightarrow \bullet$	1	$\forall z$
$\gamma_{-1}(n)$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$\frac{z}{z-1}$	$ z > 1$
$-\gamma_{-1}(-n - 1)$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$\frac{z}{z-1}$	$ z < 1$
$a^n \cdot \gamma_{-1}(n)$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$\frac{z}{z-a}$	$ z > a $
$-a^n \cdot \gamma_{-1}(-n - 1)$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$\frac{z}{z-a}$	$ z < a $
$na^n \cdot \gamma_{-1}(n)$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$\frac{za}{(z-a)^2}$	$ z > a $
$n^2 a^n \cdot \gamma_{-1}(n)$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$\frac{za(z+a)}{(z-a)^3}$	$ z > a $
$\binom{n+\lambda-1}{\kappa} a^{n+\lambda-\kappa-1} \cdot \gamma_{-1}(n + \lambda - \kappa - 1)$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$\frac{z^\lambda}{(z-a)^{\kappa+1}}$	$ z > a $
$\cos(\Omega_0 n - \varphi) \cdot \gamma_{-1}(n)$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$\frac{z[z \cos(\varphi) - \cos(\Omega_0 + \varphi)]}{z^2 - 2z \cos(\Omega_0) + 1}$	$ z > 1$
$\cos(\Omega_0 n) \cdot \gamma_{-1}(n)$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$\frac{z[z - \cos(\Omega_0)]}{z^2 - 2z \cos(\Omega_0) + 1}$	$ z > 1$
$\sin(\Omega_0 n) \cdot \gamma_{-1}(n)$	$\circ \longrightarrow \bullet$	$\frac{z \sin(\Omega_0)}{z^2 - 2z \cos(\Omega_0) + 1}$	$ z > 1$

Gebrochen-rationale Funktionen

$$B_0 + \sum_{\nu=1}^{k_0} \sum_{\kappa=1}^{k_\nu} B_{\nu,\kappa} \frac{z}{(z - z_{\infty,\nu})^\kappa} \circ \bullet B_0 \gamma_0(t) + \sum_{\nu=1}^{k_0} \sum_{\kappa=1}^{k_\nu} B_{\nu,\kappa} z_{\infty,\nu}^{n-\kappa+1} \binom{n}{\kappa-1} \gamma_{-1}(n - \kappa + 1)$$

Für $|z| > \max \{|z_{\infty,\nu}|\}$.