

Signale und Systeme I

Modulklausur WS 2024

Prüfer: Prof. Dr.-Ing. Gerhard Schmidt

Datum: 11.03.2025

Name: _____

Matrikelnummer: _____

Erklärung der Kandidatin/des Kandidaten vor Beginn der Prüfung

Hiermit bestätige ich, dass ich zur Prüfung angemeldet und zugelassen bin und dass ich prüfungsfähig bin.

Ich nehme zur Kenntnis, dass der Termin für die Klausureinsicht vom Prüfungsamt ET&IT bekannt gegeben wird, sobald mein vorläufiges Prüfungsergebnis im QIS-Portal veröffentlicht wurde. Nach dem Einsichtnahmetermin kann ich meine endgültige Note im QIS-Portal abfragen. Bis zum Ende der Widerspruchsfrist des zweiten Prüfungszeitraums der CAU kann ich beim Prüfungsausschuss Widerspruch gegen dieses Prüfungsverfahren einlegen. Danach wird meine Note rechtskräftig.

Unterschrift: _____

Korrektur

Aufgabe	1	2	3
Punkte	/33	/34	/33

Summe der Punkte: _____ /100

Einsicht/Rückgabe

Hiermit bestätige ich, dass ich die Korrektur der Klausur eingesehen habe und mit der auf diesem Deckblatt vermerkten Bewertung einverstanden bin.

- ☐ Die Klausurunterlagen verbleiben bei mir. Ein späterer Einspruch gegen die Korrektur und Benotung ist nicht mehr möglich.

Kiel, den _____ Unterschrift: _____

Signale und Systeme I

Modulklausur WS 2024

Prüfer: Prof. Dr.-Ing. Gerhard Schmidt
Ort: ES21 - D-005 - Mildred-Dresselhaus-HS
Datum: 11.03.2025
Beginn: 09:00 h
Einlesezeit: 10 Minuten
Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Hinweise

- Legen Sie Ihren Studierendenausweis oder Personalausweis zur Überprüfung bereit.
- Schreiben Sie auf **jedes** abzugebende Blatt deutlich Ihren **Namen** und Ihre **Matrikelnummer**. Dabei verwenden Sie bitte für **jede Aufgabe** der Klausur einen **neuen Papierbogen**. Zusätzliches Papier erhalten Sie auf Anfrage.
- Verwenden Sie zum Schreiben **weder Bleistift noch Rotstift**.
- Alle Hilfsmittel – außer solche, die die Kommunikation mit anderen Personen ermöglichen – sind erlaubt. Nicht zugelassene Hilfsmittel sind außer Reichweite aufzubewahren und auszuschalten.
- Die direkte Kommunikation mit Personen, die nicht der Klausuraufsicht zuzuordnen sind, ist grundsätzlich ebenfalls untersagt.
- Lösungswege müssen zur Vergabe der vollen Punktzahl immer nachvollziehbar und mit Begründung versehen sein. Sind Funktionen zu skizzieren, müssen grundsätzlich alle Achsen beschriftet werden. Beachten Sie, dass die Punkteverteilung in den Teilaufgaben nur vorläufig ist!
- Sollten Sie sich während der Klausur durch äußere Umstände bei der Bearbeitung der Klausur beeinträchtigt fühlen, ist dies unverzüglich gegenüber der Klausuraufsicht zu rügen.
- 5 Minuten und 1 Minute vor Klausurende werden Ankündigungen gemacht. Wird das **Ende der Bearbeitungszeit** angesagt, darf **nicht mehr geschrieben** werden.
- Legen Sie am Ende der Klausur alle Lösungsbögen ineinander (so, wie sie ausgeteilt wurden) und geben Sie auch die Aufgabenblätter und das **Deckblatt mit Ihrer Unterschrift** mit ab.
- Bevor alle Klausuren eingesammelt sind, darf weder der Sitzplatz verlassen noch geredet werden. Jede Form der Kommunikation wird zu diesem Zeitpunkt noch als **Täuschungsversuch** gewertet.
- Während der **Einlesezeit ist die Bearbeitung der Aufgaben untersagt**, dementsprechend sind alle Schreibutensilien oder Hilfsmittel beiseitezulegen. Jede Zuwiderhandlung wird als **Täuschungsversuch** geahndet.

Aufgabe 1 (33 Punkte)

Teil 1 Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 gelöst werden.

Gegeben sei das zeitkontinuierliche Signal $v(t)$, mit $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ und $T > 0$:

$$v(t) = 3 \sin(\omega_0 t) - 2 \sin(4\omega_0 t) + \frac{1}{2} \cos(4\omega_0 t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\omega_0} \cos(3\omega_0 t) \right] + \left(6 - 4 \sin^2(\omega_0 t) \right)$$

- (a) Bringen Sie das Signal $v(t)$ in eine Form, die für den Koeffizientenvergleich mit der trigonometrischen Fourier-Reihe geeignet ist. (6 P)

Mit

$$-\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\omega_0} \cos(3\omega_0 t) \right) = 3 \sin(3\omega_0 t)$$

und

$$\begin{aligned} \left(6 - 4 \sin^2(\omega_0 t) \right) &= 6 - 4 \left(\frac{1}{2} [1 - \cos(2\omega_0 t)] \right) \\ &= 4 + 2 \cos(2\omega_0 t) \end{aligned}$$

folgt

$$v(t) = 4 + 2 \cos(2\omega_0 t) + \frac{1}{2} \cos(4\omega_0 t) + 3 \sin(\omega_0 t) + 3 \sin(3\omega_0 t) - 2 \sin(4\omega_0 t)$$

- (b) Markieren Sie in Ihrem zuvor bestimmten Ausdruck für das Signal $v(t)$ den Gleichanteil sowie die geraden und ungeraden Wechselanteile. (2 P)

$$v(t) = \underbrace{4}_{\text{Gleichanteil}} + \underbrace{2 \cos(2\omega_0 t) + \frac{1}{2} \cos(4\omega_0 t)}_{\text{gerade}} + \underbrace{3 \sin(\omega_0 t) + 3 \sin(3\omega_0 t) - 2 \sin(4\omega_0 t)}_{\text{ungerade}}$$

- (c) Bestimmen Sie die trigonometrischen Fourier-Reihenoeffizienten des Signals $v(t)$. (3 P)

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = 4, \quad a_\mu = \begin{cases} 2 & , \mu = 2, \\ \frac{1}{2} & , \mu = 4, \\ 0 & , \text{sonst}, \end{cases} \quad b_\mu = \begin{cases} 3 & , \mu = 1, \\ 3 & , \mu = 3, \\ -2 & , \mu = 4, \\ 0 & , \text{sonst}, \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{N}.$$

- (d) Bestimmen Sie aus den trigonometrischen Fourier-Reihenoeffizienten die zugehörigen komplexen Fourier-Reihenoeffizienten c_μ des Signals $v(t)$ für $\mu \in \mathbb{Z}$. (4 P)

Mit $c_\mu = \frac{1}{2}(a_\mu - jb_\mu)$ und $c_{-\mu} = c_\mu^*$ für $\mu \in \{1, \dots, \infty\}$ folgt:

$$c_\mu = \begin{cases} \frac{1}{4} - j & , \mu = -4, \\ j\frac{3}{2} & , \mu = -3, \\ 1 & , \mu = -2, \\ j\frac{3}{2} & , \mu = -1, \\ 4 & , \mu = 0, \\ -j\frac{3}{2} & , \mu = 1, \\ 1 & , \mu = 2, \\ -j\frac{3}{2} & , \mu = 3, \\ \frac{1}{4} + j & , \mu = 4, \\ 0 & , \text{sonst.} \end{cases}$$

- (e) Handelt es sich um ein komplexes oder reelles Signal? Welche Aussage können Sie über die korrespondierende Spektraldarstellung treffen was Komplexwertigkeit sowie gerade und ungerade Spektralanteile betrifft? Begründen Sie anhand der vorkommenden Signalanteile des Zeitsignals $v(t)$. (3 P)

Da es keine imaginären Terme im Zeitsignal gibt handelt es sich um ein **reelles** Signal.

Die reellen Signalanteile mit gerader Symmetrie $v_{\text{re,ge}}(t)$ entsprechen im Spektrum einem reellen und geraden Spektralanteil

$$v_{\text{re,ge}}(t) \circ \bullet V_{\text{re,ge}}(j\omega).$$

Die reellen Signalanteile mit ungerader Symmetrie $v_{\text{re,un}}(t)$ entsprechen im Spektrum einem imaginären und ungeraden Spektralanteil

$$v_{\text{re,un}}(t) \circ \bullet j V_{\text{im,un}}(j\omega).$$

Somit ergibt sich mit $V(j\omega)$ ein **komplexes** Spektrum mit **geradem** Realteil und **ungeradem** Imaginärteil (hermite-symmetrisch, diese Information ist jedoch nicht explizit gefragt).

$$V(j\omega) = V_{\text{re,ge}}(j\omega) + j V_{\text{im,un}}(j\omega)$$

Teil 2 Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 gelöst werden.

Gegeben sei das Spektrum $X(j\omega)$, mit $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ und $T > 0$:

$$X(j\omega) = \pi \left[\delta_0(\omega) + 3 \left[\delta_0(\omega + 2\omega_0) + \delta_0(\omega - 2\omega_0) \right] - 2 \left[\delta_0(\omega + 4\omega_0) - \delta_0(\omega - 4\omega_0) \right] \right. \\ \left. + j\delta_0(\omega + \omega_0) - j2\delta_0(\omega - 2\omega_0) + j\delta_0(\omega + 3\omega_0) \right]$$

- (f) Skizzieren Sie das Spektrum $X(j\omega)$ im Bereich $\omega \in [-4\omega_0, 4\omega_0]$ mit allen Achsenbeschriftungen. Stellen Sie hierfür die reellen und imaginären Frequenzkomponenten in voneinander unabhängigen Diagrammen dar. (5 P)

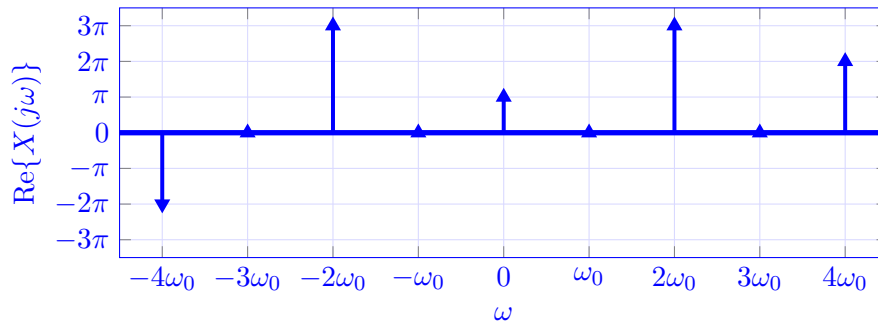


Abbildung 1: Realteil des Spektrums $X(j\omega)$.

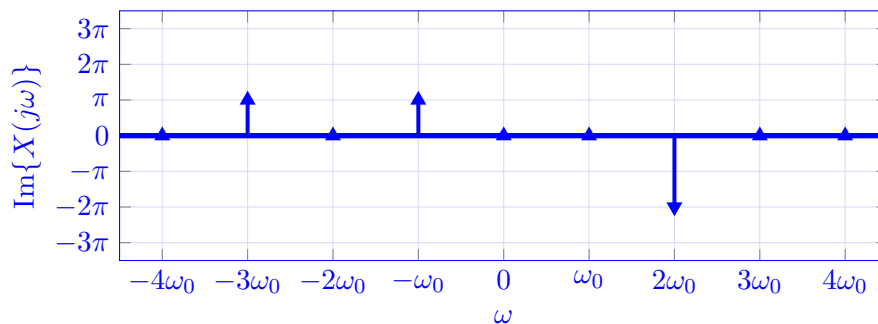


Abbildung 2: Imaginärteil des Spektrums $X(j\omega)$.

- (g) Bestimmen Sie die inverse Fourier-Transformierte $x(t)$ des Spektrums $X(j\omega)$. (5 P)

Hinweis: Die explizite Berechnung der inversen Fourier-Transformation ist nicht notwendig!

Nützliche Korrespondenzen zur Bestimmung des Zeitsignals:

$$\begin{aligned} 1 &\longleftrightarrow 2\pi\delta_0(\omega) \\ \cos(\omega_0 t) &\longleftrightarrow \pi \left[\delta_0(\omega + \omega_0) + \delta_0(\omega - \omega_0) \right] \\ \sin(\omega_0 t) &\longleftrightarrow j\pi \left[\delta_0(\omega + \omega_0) - \delta_0(\omega - \omega_0) \right] \\ e^{j\omega_0 t} &\longleftrightarrow 2\pi\delta_0(\omega - \omega_0) \end{aligned}$$

Daraus folgt für die verschiedenen Terme des Spektrums $X(j\omega)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &\longleftrightarrow \pi\delta_0(\omega) \\ 3\cos(2\omega_0 t) &\longleftrightarrow 3\pi \left[\delta_0(\omega + 2\omega_0) + \delta_0(\omega - 2\omega_0) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 j2 \sin(4\omega_0 t) &\circ\text{---}\bullet - 2\pi \left[\delta_0(\omega + 4\omega_0) - \delta_0(\omega - 4\omega_0) \right] \\
 \frac{j}{2} e^{-j\omega_0 t} &\circ\text{---}\bullet j\delta_0(\omega + \omega_0) \\
 -j e^{j2\omega_0 t} &\circ\text{---}\bullet j\delta_0(\omega - 2\omega_0) \\
 \frac{j}{2} e^{-j3\omega_0 t} &\circ\text{---}\bullet j\delta_0(\omega + 3\omega_0)
 \end{aligned}$$

Folglich gilt für das Zeitsignal $x(t)$

$$x(t) = \frac{1}{2} + 3 \cos(2\omega_0 t) + j \left[2 \sin(4\omega_0 t) + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t} - e^{j2\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j3\omega_0 t} \right]$$

(h) Ist das Spektrum $X(j\omega)$ bandbegrenzt? Begründen Sie Ihre Aussage. (2 P)

Das Spektrum $X(j\omega)$ weist seine maximale Frequenzkomponente bei $\omega_b = 4\omega_0$ auf und hat außerhalb dieser maximalen Frequenz keine Spektralanteile, gemäß

$$X(j\omega) = 0, \quad \forall |\omega| > 4\omega_0.$$

Somit ist das Spektrum $X(j\omega)$ bandbegrenzt.

Das Signal $x(t)$ wird nun mit der Abtastfrequenz $\omega_a = 12 \frac{\pi}{T}$ abgetastet.

(i) Begründen Sie, ob das Abtasttheorem bei der Abtastung des Signals $x(t)$ mit der Abtastfrequenz ω_a eingehalten wird. Welche Folgen hätte eine Verletzung des Abtasttheorems? (3 P)

Das Abtasttheorem besagt, dass ein Tiefpass-Signal, bandbegrenzt durch eine maximale Frequenz ω_b (bzw. ein Bandpass-Signal mit der Bandbreite ω_b), dann exakt rekonstruierbar ist, wenn es mit der Abtastfrequenz ω_a abgetastet wurde:

$$\omega_a \geq 2\omega_b.$$

Somit gilt für die Abtastung von $v(t)$ mit $\omega_b = 12 \frac{\pi}{T} = 6\omega_0$:

$$2\omega_b = 8\omega_0 \not\geq 6\omega_0 = \omega_a.$$

Dementsprechend wird das Abtasttheorem hier verletzt.

Bei einer Verletzung des Abtasttheorems können unerwünschte Signalkomponenten (**Aliasing**) im diskretisierten Signal auftreten. Dadurch kann es zur Maskierung von erwünschten Signalkomponenten kommen, was zu einem Informationsverlust führt wodurch das ursprüngliche Zeitsignal $v(t)$ nicht mehr vollständig aus dem diskretisierten Signal $v_A(n)$ rekonstruiert werden kann.

Aufgabe 2 (34 Punkte)

Teil 1 Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 gelöst werden.

Gegeben sei das diskrete Signal $v_1(n)$

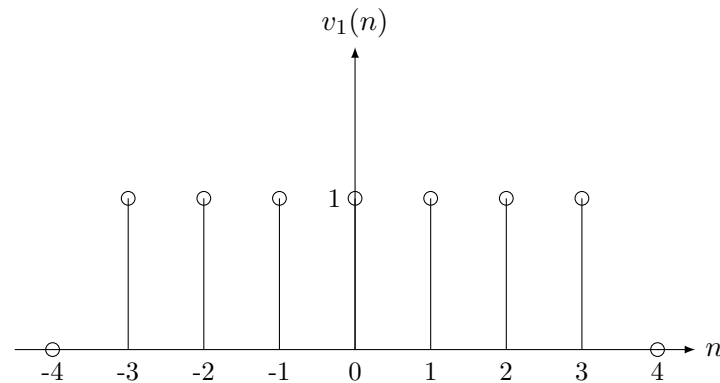


Abbildung 3: Zeitdiskretes Signal $v_1(n)$.

sowie das diskrete Signal $v_2(n)$, welches wie folgt definiert ist:

$$v_2(n) = \sum_{\kappa=-N}^N \gamma_0(n - \kappa).$$

- (a) Zeichnen Sie das Signal $y(n) = v_1(n) * v_2(n)$ im Bereich $-6 \leq n \leq 6$, wobei für $v_2(n)$ $N = 2$ gilt. Beschriften Sie die Achsen vollständig. (8 P)

Hinweis: Bestimmen Sie die Werte des Signals $v_2(n)$ und führen Sie die Faltung grafisch durch.

Das Signal $v_2(n)$ ist ein Rechtecksignal und wird wie folgt definiert:

$$v_2(n) = \begin{cases} 1, & \text{für } |n| \leq N, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Mit $N = 2$ gilt:

$$v_2(n) = \begin{cases} 1, & \text{für } n \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da $v_1(n)$ und $v_2(n)$ Rechtecksignale sind, entspricht das Ergebnis der Faltung einem Trapezsignal. Die Form ergibt sich aus den Überlappungen der beiden Rechtecke während der Faltung. Das Ergebnis der linearen Faltung ist ein diskretes Signal mit

den Werten:

$$y(n) = \begin{cases} 1, & n = -5, \\ 2, & n = -4, \\ 3, & n = -3, \\ 4, & n = -2, \\ 5, & n = -1, \\ 5, & n = 0, \\ 5, & n = 1, \\ 4, & n = 2, \\ 3, & n = 3, \\ 2, & n = 4, \\ 1, & n = 5. \end{cases}$$

Das grafische Ergebnis der Faltung ist in Abb. 4 dargestellt:

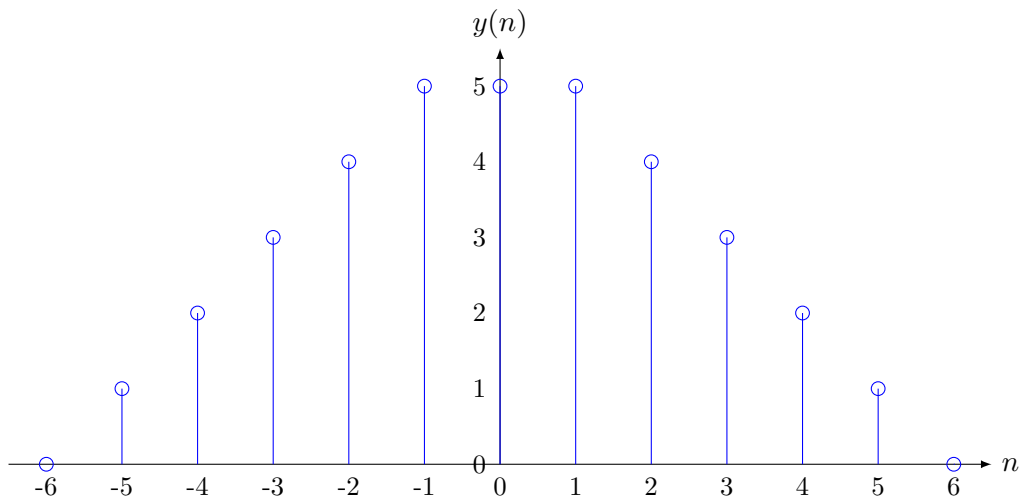


Abbildung 4: Zeitdiskretes Signal $y(n)$.

- (b) Berechnen Sie die zeitdiskrete Fourier-Transformation von $V_2(e^{j\Omega}) = \mathcal{F}\{v_2(n)\}$. (4 P)
 Durch das Umformen des Signals $v_2(n)$ in

$$v_2(n) = \begin{cases} 1, & \text{für } |n| \leq N, \\ 0, & \text{für } |n| > N. \end{cases}$$

kann die Transformation

$$V_2(e^{j\Omega}) = \frac{\sin\left(\Omega\left(N + \frac{1}{2}\right)\right)}{\sin(\Omega/2)} = \frac{\sin\left(\Omega\left(2 + \frac{1}{2}\right)\right)}{\sin(\Omega/2)} = \frac{\sin\left(\Omega\left(\frac{5}{2}\right)\right)}{\sin(\Omega/2)}$$

aus der Korrespondenztabelle abgelesen werden.

Teil 2 Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 gelöst werden.

Gegeben ist die Folge $v_{K,N}(n)$, welche wie folgt definiert ist:

$$v_{K,N}(n) = \begin{cases} \sum_{k=1}^K \sin^2\left(n k \frac{\pi}{N}\right), & 0 \leq n < N, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(c) Bestimmen Sie die Werte der Folge $v_{1,4}(n)$ für den Bereich $-1 \leq n \leq 5$. (4P)

Die Werte der Folge $v_{1,4}(n)$ ergeben sich durch Einsetzen der diskreten Werte in die Definition von $v_{K,N}(n)$. Die Berechnung liefert:

$$v_{1,4}(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n = 1, \\ 1, & n = 2, \\ \frac{1}{2}, & n = 3, \\ 0, & \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{1, 2, 3\}. \end{cases}$$

Mit $h(n)$ ist ein weiteres diskretes Signal gegeben und wird wie folgt definiert:

$$h(n) = \gamma_{-1}(n) + \gamma_{-1}(n-2) - 3\gamma_{-1}(n-3) + \gamma_{-1}(n-4),$$

wobei $\gamma_{-1}(n)$ die Sprungfolge bezeichnet.

(d) Berechnen Sie das Signal $y_L(n)$, welches durch die lineare Faltung von $v_{1,4}(n)$ mit $h(n)$ definiert ist:

$$y_L(n) = v_{1,4}(n) * h(n).$$

Bestimmen Sie zusätzlich die Gesamtlänge des diskreten Signals $y_L(n)$. (6P)

Einsetzen der Werte in $h(n)$ ergibt:

$$h(n) = \begin{cases} 1 & n = 0, \\ 1 & n = 1, \\ 2 & n = 2, \\ -1 & n = 3, \\ 0, & \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, 2, 3\}. \end{cases}$$

Das Ergebnis der linearen Faltung wird wie folgt berechnet:

$$y_L(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_{1,4}(k) \cdot h(n-k).$$

Die diskreten Werte für $y(n)$ lauten:

$$y_L(n) = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 2, 0, -\frac{1}{2} \right].$$

Für die Länge der linearen Faltung gilt:

$$M = M_1 + M_2 - 1$$

wobei M_1 die Länge des Signals $v_{1,4}(n)$ und M_2 die Länge des Signals $h(n)$ ist.

- $M_1 = 3$ (Länge von $v_{1,4}(n)$)
- $M_2 = 4$ (Länge von $h(n)$)

Daraus folgt:

$$M = 3 + 4 - 1 = 6.$$

Das spektrale Signal $Y_M(\mu)$ ergibt sich aus dem Signalflussgraph, wie in Abb. 5 dargestellt ist.

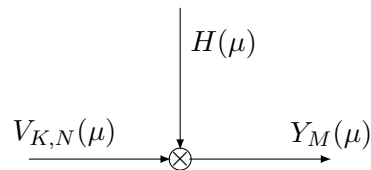


Abbildung 5: Verschaltung der gegebenen Signale.

Hierbei ist $Y_M(\mu)$ gegeben durch:

$$Y_M(\mu) = \begin{cases} 6, & \mu = 0, \\ 1 + j2, & \mu = 1, \\ 0, & \mu = 2, \\ 1 - j2, & \mu = 3. \end{cases}$$

- (e) Bestimmen Sie die IDFT $y(n) = \text{IDFT}\{Y_M(\mu)\}$ für $0 \leq n \leq 3$ mit $M = 4$. (6P)
 Die IDFT ist durch die Formel definiert:

$$y(n) = \frac{1}{M} \sum_{\mu=0}^{M-1} \tilde{Y}_M(\mu) \cdot e^{j\mu \frac{2\pi}{M} n},$$

wobei $M = 4$ die Länge des Signals ist.

Für $n = 0$:

$$y(0) = \frac{1}{4} \sum_{\mu=0}^3 Y_4(\mu) \cdot e^{j\frac{2\pi}{4} \cdot 0 \cdot \mu}$$

Da $e^{j\frac{2\pi}{4} \cdot 0 \cdot \mu} = 1$ für alle μ , ergibt sich:

$$y(0) = \frac{1}{4} (6 + (1 + 2j) + 0 + (1 - 2j)) = \frac{1}{4} \cdot 8 = 2.$$

Für $n = 1$:

$$y(1) = \frac{1}{4} \sum_{\mu=0}^3 Y_4(\mu) \cdot e^{j\frac{2\pi}{4} \cdot 1 \cdot \mu}$$

Nach Vereinfachung:

$$y(1) = \frac{1}{4} (6 + (-2 + j) + 0 + (-2 - j)) = \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}$$

Für $n = 2$:

$$y(2) = \frac{1}{4} \sum_{\mu=0}^3 Y_4(\mu) \cdot e^{j\frac{2\pi}{4} \cdot 2 \cdot \mu}.$$

Nach Vereinfachung:

$$y(2) = \frac{1}{4} (6 - 1 - 2j - 1 + 2j) = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1.$$

Für $n = 3$:

$$y(3) = \frac{1}{4} \sum_{\mu=0}^3 Y_4(\mu) \cdot e^{j\frac{2\pi}{4} \cdot 3 \cdot \mu}.$$

Nach Vereinfachung:

$$y(3) = \frac{1}{4} (6 + (2 - j) + (2 + j)) = \frac{1}{4} \cdot 10 = \frac{5}{2}.$$

Zusammenfassend:

$$y(n) = \begin{cases} 2, & n = 0, \\ \frac{1}{2}, & n = 1, \\ 1, & n = 2, \\ \frac{5}{2}, & n = 3, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(f) Sind die Folgen $y_L(n)$ und $y(n)$ identisch? Begründen Sie. (3P)

Nein, die Folgen $y_L(n)$ und $y(n)$ sind nicht identisch, da die Operationen im Zeit- und Frequenzbereich unterschiedlich definiert sind. Eine Multiplikation im Frequenzbereich entspricht einer *zyklischen Faltung* im Zeitbereich, während die direkte Berechnung von $y_L(n)$ als *lineare Faltung* durchgeführt wird. Daher ergeben sich unterschiedliche Ergebnisse.

(g) Wie kann die zyklische Faltung in die lineare Faltung überführt werden? (3P)

Durch Zero-Padding der Folgen $v_{K,N}(n)$ und $h(n)$ auf die Länge $M_1 + M_2 - 1$ wird die zyklische Faltung so erweitert, dass sie der linearen Faltung entspricht. Dadurch werden periodische Überlappungen vermieden und das Ergebnis korrekt berechnet.

Aufgabe 3 (33 Punkte)

Teil 1 Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 und Teil 3 gelöst werden.

Gegeben sind die drei Pol-Nullstellen-Diagramme kontinuierlicher Systeme aus Abbildung 6.

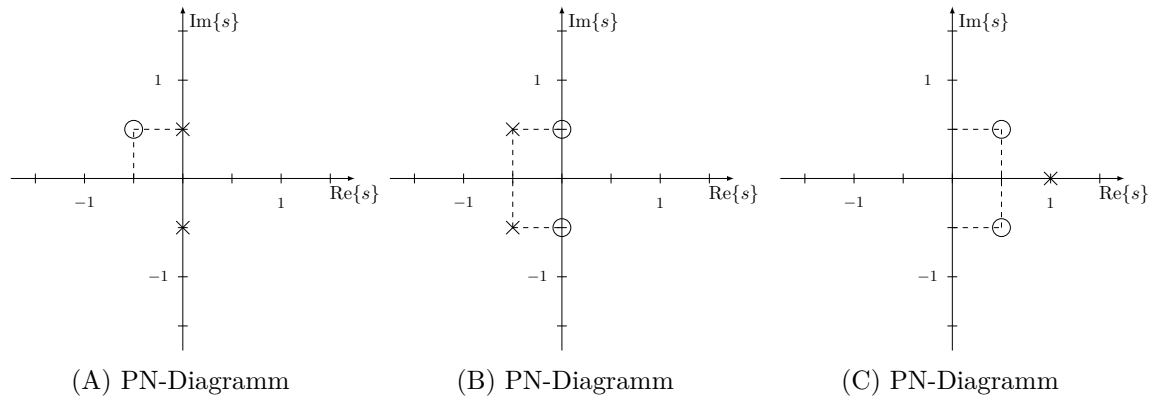


Abbildung 6: Pol-/Nullstellen-Diagramme kontinuierlicher Systeme.

(a) Ordnen Sie den Pol-Nullstellen-Diagrammen die zugehörigen Systemeigenschaften zu. Begründen Sie Ihre Antwort. (6 P)

- (I) stabil & reellwertig
- (II) grenzstabil & minimalphasig
- (III) maximalphasig & reellwertig

- (A) → (II) Das System ist grenzstabil, da die Polstellen auf der imaginären Achse liegen. Die Nullstelle liegt in der linken Halbebene, daher ist das System minimalphasig.
- (B) → (I) Das System ist stabil, da die Polstellen in der linken Halbebene liegen. Außerdem ist es reellwertig, da sowohl die Pol- als auch die Nullstellen als komplex konjugierte Paare vorliegen.
- (C) → (III) Das System ist maximalphasig, da die Nullstellen in der rechten Halbebene liegen. Die Nullstellen liegen als komplex konjugiertes Paar vor und die Polstelle ist reell, daher ist das System reellwertig.

Teil 2 Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und Teil 3 gelöst werden.

Das System $S_1\{\cdot\}$ wird durch die folgende Gleichung

$$y(t) = v(t) \cdot \cos(\omega_0(t - T))$$

mit $y(t) = S_1\{v(t)\}$ beschrieben. Dabei gilt $v(t) \in \mathbb{R} \forall t$ und $T \in \mathbb{Z}$.

- (b) Untersuchen Sie das System auf Linearität, Verschiebungsinvarianz, Kausalität und Stabilität. Begründen Sie Ihre Antwort inklusive Vorgehensweise ausführlich. (10 P)

- **Linearität**

Ein System ist linear, wenn der Überlagerungssatz gilt:

$$S\left\{\sum_{l=-\infty}^{\infty} \alpha_l v_l(t)\right\} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \alpha_l S\{v_l(t)\}$$

Für das System $S_1\{\cdot\}$ gilt:

$$S\left\{\sum_{l=-\infty}^{\infty} \alpha_l v_l(t)\right\} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \alpha_l v_l(t) \cos(\omega_0(t-T)) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \alpha_l S\{v_l(t)\}$$

Somit ist das System linear.

- **Verschiebungsinvarianz**

Ein System ist verschiebungsinvariant, wenn die Reihenfolge des Systemoperators und einer Signalverschiebung vertauscht werden können:

$$S\{v(t-\tau)\} = y(t-\tau)$$

Für das System $S_1\{\cdot\}$ gilt:

$$\begin{aligned} S\{v(t-\tau)\} &= v(t-\tau) \cos(\omega_0(t-T)) \\ &\neq y(t-\tau) = v(t-\tau) \cos(\omega_0(t-\tau-T)) \end{aligned}$$

Das System ist also nicht verschiebungsinvariant.

- **Kausalität**

Ein System ist kausal, wenn der Systemausgang $y(t)$ zum Zeitpunkt t_0 nur von $v(t \leq t_0)$, also Werten aus der Vergangenheit, abhängt.

Dies ist hier gegeben, weshalb das System kausal ist.

- **Stabilität**

Ein System ist stabil, wenn es auf ein beschränktes Eingangssignal mit einem beschränkten Ausgangssignal reagiert:

$$\text{Für } |v(t)| \leq M_1 < \infty, \forall t \text{ muss gelten } |y(t)| \leq M_2 < \infty, \forall t.$$

Für das System $S_1\{\cdot\}$ gilt:

$$\begin{aligned} |v(t)| &\leq M_1 < \infty, \forall t, \\ |y(t)| &= |v(t) \cos(\omega_0(t-T))| \leq M_2 < \infty, \forall t. \end{aligned}$$

Somit ist das System stabil.

Teil 3 Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und Teil 2 gelöst werden.

Gegeben sei ein diskretes System mit der folgenden Übertragungsfunktion $H_1(z)$:

$$H_1(z) = \frac{\left(z - \left(\frac{1}{2} + j\frac{1}{4}\right)\right)\left(z - \left(\frac{1}{2} - j\frac{1}{4}\right)\right)}{(z - j\frac{1}{4})(z + j\frac{1}{4})}$$

- (c) Bestimmen Sie die Impulsantwort $h_{0,1}(n)$ aus der Übertragungsfunktion $H_1(z)$. Es gilt $|z| > |a|$. (8 P)

Hinweis: Eine Partialbruchzerlegung ist zur Lösung dieser Aufgabe hilfreich!

Um die Impulsantwort zu bestimmen, muss zunächst eine Partialbruchzerlegung durchgeführt werden. Dafür ist es sinnvoll, die Übertragungsfunktion in eine geeignete Form zu bringen:

$$\begin{aligned} H_1(z) &= \frac{\left(z - \left(\frac{1}{2} + j\frac{1}{4}\right)\right)\left(z - \left(\frac{1}{2} - j\frac{1}{4}\right)\right)}{(z - j\frac{1}{4})(z + j\frac{1}{4})} \\ &= \frac{(z - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{16}}{(z - j\frac{1}{4})(z + j\frac{1}{4})} \\ &= \frac{z^2 - z + \frac{5}{16}}{(z - j\frac{1}{4})(z + j\frac{1}{4})} \end{aligned}$$

Nun erfolgt die Partialbruchzerlegung:

$$\frac{H_1(z)}{z} = \frac{z^2 - z + \frac{5}{16}}{z(z - j\frac{1}{4})(z + j\frac{1}{4})} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z - j\frac{1}{4}} + \frac{C}{z + j\frac{1}{4}}$$

Bestimmung der Koeffizienten A , B und C :

$$\begin{aligned} A &= \left. \frac{z^2 - z + \frac{5}{16}}{(z - j\frac{1}{4})(z + j\frac{1}{4})} \right|_{z=0} &= \frac{\frac{5}{16}}{\frac{1}{16}} &= 5 \\ B &= \left. \frac{z^2 - z + \frac{5}{16}}{z(z + j\frac{1}{4})} \right|_{z=j\frac{1}{4}} &= \frac{\frac{1}{4} - j\frac{1}{4}}{-\frac{1}{8}} &= -2 + j2 \\ C &= \left. \frac{z^2 - z + \frac{5}{16}}{z(z - j\frac{1}{4})} \right|_{z=-j\frac{1}{4}} &= \frac{\frac{1}{4} + j\frac{1}{4}}{-\frac{1}{8}} &= -2 - j2 \end{aligned}$$

$$H_1(z) = 5 + \frac{(-2 + j2)z}{z - j\frac{1}{4}} + \frac{(-2 - j2)z}{z + j\frac{1}{4}}$$

Mit den Korrespondenzen $1 \bullet \circ \gamma_0(n)$ und $\frac{z}{z-a} \bullet \circ a^n \gamma_{-1}(n)$ ergibt sich die Impulsantwort:

$$H_1(z) = 5 + \frac{(-2 + j2)z}{z - j\frac{1}{4}} + \frac{(-2 - j2)z}{z + j\frac{1}{4}}$$

$$h_{0,1}(n) = 5 \gamma_0(n) + (-2 + j 2) \left(j \frac{1}{4}\right)^n \gamma_{-1}(n) + (-2 - j 2) \left(-j \frac{1}{4}\right)^n \gamma_{-1}(n)$$

- (d) Zeichnen Sie die Impulsantwort $h_{0,1}(n)$ im Bereich $n \in [-1, 5]$ mit allen Achsenbeschriftungen. Bitte geben Sie die jeweiligen Funktionswerte auf zwei Nachkommastellen gerundet an. Ein Rechenweg muss nicht angegeben werden. (5 P)

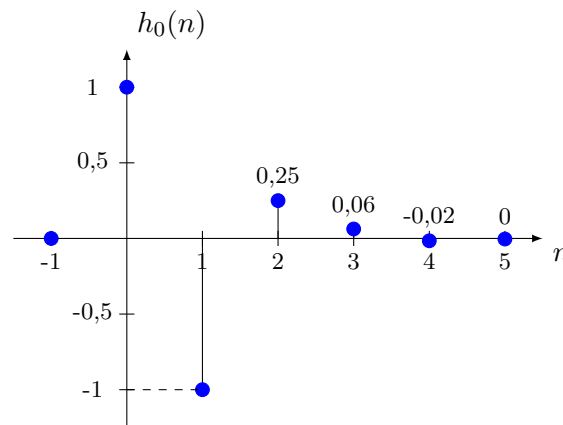


Abbildung 7: Impulsantwort $h_{0,1}(n)$ im Bereich $n \in [-1, 5]$.

- (e) Ist das System stabil? Begründen Sie Ihre Antwort sowohl anhand der Übertragungsfunktion $H_1(z)$ als auch anhand der Impulsantwort $h_{0,1}(n)$. (2 P)
 Die Polstellen des Systems können aus dem Nenner der Übertragungsfunktion $H_1(z)$ abgelesen werden. Diese befinden sich innerhalb des Einheitskreises. Daher ist das System stabil. Zudem konvergiert die Impulsantwort $h_{0,1}(n)$ gegen Null, wodurch ebenfalls darauf geschlossen werden kann, dass das System stabil ist.
- (f) Ist das System maximalphasig? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 P)
 Die Nullstellen maximalphasiger Systeme liegen außerhalb des Einheitskreises. Aus dem Zähler der Übertragungsfunktion $H_1(z)$ können die Nullstellen des gegebenen Systems abgelesen werden. Diese liegen innerhalb des Einheitskreises, weshalb das System nicht maximalphasig ist.

Dies ist eine leere Seite.