

Signale und Systeme I

Modulklausur SS 2023

Prüfer: Prof. Dr.-Ing. Gerhard Schmidt

Datum: 19.09.2023

Name: _____

Matrikelnummer: _____

Erklärung der Kandidatin/des Kandidaten vor Beginn der Prüfung

Hiermit bestätige ich, dass ich zur Prüfung angemeldet und zugelassen bin und dass ich prüfungsfähig bin.

Ich nehme zur Kenntnis, dass der Termin für die Klausureinsicht vom Prüfungsamt ET&IT bekannt gegeben wird, sobald mein vorläufiges Prüfungsergebnis im QIS-Portal veröffentlicht wurde. Nach dem Einsichtnahmetermin kann ich meine endgültige Note im QIS-Portal abfragen. Bis zum Ende der Widerspruchsfrist des zweiten Prüfungszeitraums der CAU kann ich beim Prüfungsausschuss Widerspruch gegen dieses Prüfungsverfahren einlegen. Danach wird meine Note rechtskräftig.

Unterschrift: _____

Korrektur

Aufgabe	1	2	3
Punkte	/33	/33	/34

Summe der Punkte: _____ /100

Einsicht/Rückgabe

Hiermit bestätige ich, dass ich die Korrektur der Klausur eingesehen habe und mit der auf diesem Deckblatt vermerkten Bewertung einverstanden bin.

- Die Klausurunterlagen verbleiben bei mir. Ein späterer Einspruch gegen die Korrektur und Benotung ist nicht mehr möglich.

Kiel, den _____ Unterschrift: _____

Signale und Systeme I

Modulklausur SS 2023

Prüfer: Prof. Dr.-Ing. Gerhard Schmidt
Ort: CAP3 - Hörsaal 2 und 3
Datum: 19.09.2023
Beginn: 09:00 h
Einlesezeit: 10 Minuten
Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Hinweise

- Legen Sie Ihren Studierendenausweis oder Personalausweis zur Überprüfung bereit.
- Schreiben Sie auf **jedes** abzugebende Blatt deutlich Ihren **Namen** und Ihre **Matrikelnummer**. Dabei verwenden Sie bitte für **jede Aufgabe** der Klausur einen **neuen Papierbogen**. Zusätzliches Papier erhalten Sie auf Anfrage.
- Verwenden Sie zum Schreiben **weder Bleistift noch Rotstift**.
- Alle Hilfsmittel – außer solche, die die Kommunikation mit anderen Personen ermöglichen – sind erlaubt. Nicht zugelassene Hilfsmittel sind außer Reichweite aufzubewahren und auszuschalten.
- Die direkte Kommunikation mit Personen, die nicht der Klausuraufsicht zuzuordnen sind, ist grundsätzlich ebenfalls untersagt.
- Lösungswege müssen zur Vergabe der vollen Punktzahl immer nachvollziehbar und mit Begründung versehen sein. Sind Funktionen zu skizzieren, müssen grundsätzlich alle Achsen beschriftet werden. Beachten Sie, dass die Punkteverteilung in den Teilaufgaben nur vorläufig ist!
- Sollten Sie sich während der Klausur durch äußere Umstände bei der Bearbeitung der Klausur beeinträchtigt fühlen, ist dies unverzüglich gegenüber der Klausuraufsicht zu rügen.
- 5 Minuten und 1 Minute vor Klausurende werden Ankündigungen gemacht. Wird das **Ende der Bearbeitungszeit** angesagt, darf **nicht mehr geschrieben** werden.
- Legen Sie am Ende der Klausur alle Lösungsbögen ineinander (so, wie sie ausgeteilt wurden) und geben Sie auch die Aufgabenblätter und das **Deckblatt mit Ihrer Unterschrift** mit ab.
- Bevor alle Klausuren eingesammelt sind, darf weder der Sitzplatz verlassen noch geredet werden. Jede Form der Kommunikation wird zu diesem Zeitpunkt noch als **Täuschungsversuch** gewertet.
- Während der **Einlesezeit ist die Bearbeitung der Aufgaben untersagt**, dementsprechend sind alle Schreibutensilien oder Hilfsmittel beiseitezulegen. Jede Zuwiderhandlung wird als **Täuschungsversuch** geahndet.

Aufgabe 1 (33 Punkte)

Teil 1 Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 gelöst werden.

Gegeben sei das zeitkontinuierliche Signal $v(t)$, mit $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ und $T > 0$:

$$v(t) = -\left(\cos(3\omega_0 t) - \frac{1}{2}\sin(3\omega_0 t)\right) + \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\omega_0}\cos(2\omega_0 t)\right] + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2}{\pi}\cos(4\omega_0 T)dt.$$

- (a) Bringen Sie das Signal $v(t)$ in eine Form, die für den Koeffizientenvergleich mit der trigonometrischen Fourier-Reihe geeignet ist. (6 P)

Vereinfachung einzelner Terme:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\omega_0}\cos(2\omega_0 t)\right] &= -\frac{2\omega_0}{\omega_0}\sin(2\omega_0 t) \\ &= -2\sin(2\omega_0 t) \\ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2}{\pi}\cos(4\omega_0 T)dt &= \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\left(4\frac{2\pi}{T}T\right)dt \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(8\pi)dt \\ &= \frac{2}{\pi}\left[t\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= 4\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$v(t) = 4 - \cos(3\omega_0 t) - 2\sin(2\omega_0 t) + \frac{1}{2}\sin(3\omega_0 t)$$

- (b) Markieren Sie in Ihrem zuvor bestimmten Ausdruck für das Signal $v(t)$ den Gleichanteil sowie die geraden und ungeraden Wechselanteile. (2 P)

$$v(t) = \underbrace{4}_{\text{Gleichanteil}} - \underbrace{\cos(3\omega_0 t)}_{\text{gerade}} - \underbrace{2\sin(2\omega_0 t) + \frac{1}{2}\sin(3\omega_0 t)}_{\text{ungerade}}$$

- (c) Bestimmen Sie die trigonometrischen Fourier-Reihenoeffizienten des Signals $v(t)$. (3 P)

$$c_0 = 4, \quad a_\mu = \begin{cases} -1 & , \mu = 3, \\ 0 & , \text{sonst,} \end{cases} \quad b_\mu = \begin{cases} -2 & , \mu = 2, \\ \frac{1}{2} & , \mu = 3, \\ 0 & , \text{sonst.} \end{cases}$$

- (d) Bestimmen Sie aus den trigonometrischen Fourier-Reihenoeffizienten die zugehörigen komplexen Fourier-Reihenoeffizienten c_μ des Signals $v(t)$ für $\mu \in \mathbb{Z}$. (3 P)

Mit $c_\mu = \frac{1}{2}(a_\mu - jb_\mu)$ und $c_{-\mu} = c_\mu^*$ für $\mu \in \{1, \dots, \infty\}$ folgt:

$$c_\mu = \begin{cases} -\frac{1}{2} + j\frac{1}{4} & , \mu = -3, \\ -j & , \mu = -2, \\ 4 & , \mu = 0, \\ j & , \mu = 2, \\ -\frac{1}{2} - j\frac{1}{4} & , \mu = 3, \\ 0 & , \text{sonst.} \end{cases}$$

Im Folgenden soll $V(j\omega)$ nun das Spektrum des Signals $v(t)$ darstellen.

- (e) Welche Aussagen können Sie über die Symmetrieeigenschaften der reellen und/oder komplexen Anteile des Spektrums $V(j\omega)$ treffen? Begründen Sie anhand der vorkommenden Signalanteile des Zeitsignals $v(t)$ und treffen Sie eine Aussage über die Gesamtsymmetrie des Spektrums $V(j\omega)$. (3 P)

Die reellen Signalanteile $v_{\text{re,ge}}(t) = -\cos(3\omega_0 t)$ mit gerader Symmetrie entsprechen im Spektrum einem reellen und geraden Spektralanteil

$$v_{\text{re,ge}}(t) \circ \bullet V_{\text{re,ge}}(j\omega).$$

Die reellen Signalanteile $v_{\text{re,un}}(t) = -2\sin(2\omega_0 t) + \frac{1}{2}\sin(3\omega_0 t)$ mit ungerader Symmetrie entsprechen im Spektrum einem imaginären und ungeraden Spektralanteil

$$v_{\text{re,un}}(t) \circ \bullet j V_{\text{im,un}}(j\omega).$$

Somit ergibt sich mit $V(j\omega)$ ein hermite-symmetrisch komplexes Spektrum mit geradem Realteil und ungeradem Imaginärteil.

$$V(j\omega) = V_{\text{re,ge}}(j\omega) + j V_{\text{im,un}}(j\omega)$$

Teil 2 Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 gelöst werden.

Gegeben sei das Spektrum $X(j\omega)$, mit $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ und $T > 0$:

$$X(j\omega) = \pi \left[3\delta_0(\omega) + j2 \left[\delta_0(\omega + \omega_0) - \delta_0(\omega - \omega_0) \right] + 4\delta_0(\omega - 2\omega_0) \right].$$

- (f) Skizzieren Sie das Spektrum $X(j\omega)$ im Bereich $\omega \in [-3\omega_0, 3\omega_0]$ mit allen Achsenbeschriftungen. Stellen Sie hierfür die reellen und imaginären Frequenzkomponenten in voneinander unabhängigen Diagrammen dar. (6 P)

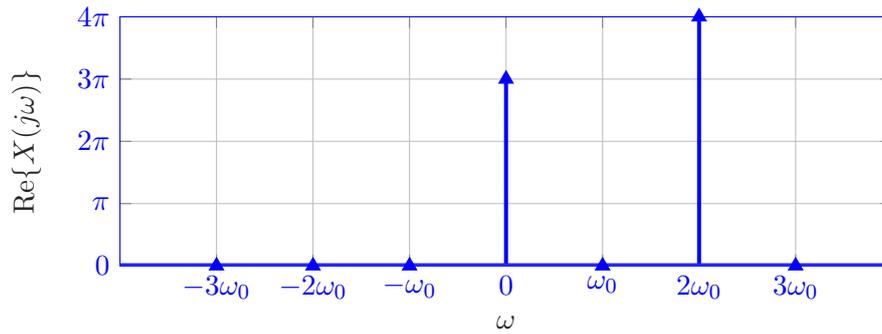


Abbildung 1: Realteil des Spektrums $X(j\omega)$.

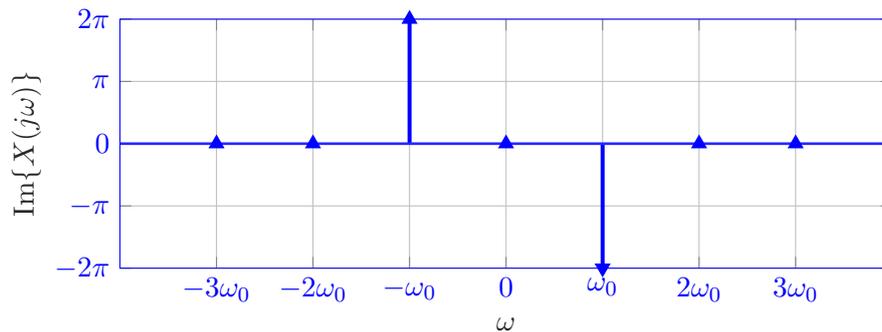


Abbildung 2: Imaginärteil des Spektrums $X(j\omega)$.

- (g) Bestimmen Sie die inverse Fourier-Transformierte $x(t)$ des Spektrums $X(j\omega)$. (5 P)

Hinweis: Die explizite Berechnung der inversen Fourier-Transformation ist nicht notwendig!

Nützliche Korrespondenzen zur Bestimmung des Zeitsignals:

$$\begin{aligned} \sin(\omega_0 t) &\longleftrightarrow j\pi [\delta_0(\omega + \omega_0) - \delta_0(\omega - \omega_0)] \\ e^{j\omega_0 t} &\longleftrightarrow 2\pi\delta_0(\omega - \omega_0) \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$x(t) = \frac{3}{2} + 2 \sin(\omega_0 t) + 2e^{j2\omega_0 t}$$

- (h) Erklären Sie, bei welcher Art von Signaldarstellung das Gibbs'sche Phänomen auftreten kann und was die Bedingungen dafür sind. Begründen Sie anschließend, ob bei der entsprechenden Darstellung von $x(t)$ das Gibbs'sche Phänomen auftritt. (5 P)

Das Gibbs'sche Phänomen kann bei der Fourier-Reihendarstellung von zeitkontinuierlichen Signalen mit un stetigen oder unendlich steilen Signalübergängen (z.B. Rechteckfunktion) auftreten. Dies ist der Fall, wenn eine endliche Anzahl von Fourier-Reihenoeffizienten zur Signaldarstellung verwendet wird, wodurch nur eine endliche Bandbreite repräsentiert werden kann. Die steilflankigen Sprungstellen stellen jedoch eine Signalanregung mit unendlicher Bandbreite dar, wodurch auch unendlich

viele Fourier-Reihenoeffizienten zur korrekten Darstellung benötigt werden. Daher kommt es bei der Fourier-Reihendarstellung zu Überschwingern im Zeitsignal, deren maximale Auslenkung auch bei Erhöhung der Anzahl der Fourier-Reihenoeffizienten konstant bleibt.

Das Signal $x(t)$ kann vollständig durch eine endliche Anzahl von Fourier-Reihenoeffizienten repräsentiert werden, da es aus einer Überlagerung verschiedener Schwingungssignale mit begrenzter Bandbreite besteht und keine un stetigen Signalübergänge aufweist. Daher tritt das Gibbs'sche Phänomen nicht bei der Fourier-Reihendarstellung von $x(t)$ auf.

Aufgabe 2 (33 Punkte)

Teil 1 Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 und 3 gelöst werden.

Die DFT eines diskreten Signals $v(n)$ lässt sich wie folgt aufschreiben:

$$V_M(\mu) = V_{M \text{ re,ge}}(\mu) + V_{M \text{ re,un}}(\mu) + jV_{M \text{ im,ge}}(\mu) + jV_{M \text{ im,un}}(\mu).$$

Die Indizierung in der oberen Gleichung ist wie folgt: „re“ steht für reell, „im“ für imaginär, „ge“ für gerade und „un“ für ungerade.

- (a) Angenommen das Signal $v(n)$ wäre reell, wie würde sich die obere Gleichung vereinfachen? Führen Sie die Vereinfachung durch. (2 P)

$$V_M(\mu) = V_{M \text{ re,ge}}(\mu) + jV_{M \text{ im,un}}(\mu).$$

- (b) Für die DFT aus Aufgabenteil (a) wird die Frequenzumkehrung $V_M(-\mu)$ durchgeführt. Schreiben Sie die Gleichung für $V_M(-\mu)$ so um, dass ein Ausdruck mit Abhängigkeit von $V_M(\mu)$ entsteht. (4 P)

$$V_M(-\mu) = V_{M \text{ re,ge}}(-\mu) + jV_{M \text{ im,un}}(-\mu) = V_{M \text{ re,ge}}(\mu) - jV_{M \text{ im,un}}(\mu) = V_M^*(\mu).$$

- (c) Welche Erkenntnis aus dem Ergebnis des Aufgabenteils (b) lässt sich somit für die DFT von reellen Signale ableiten? Schreiben Sie Ihre Antwort in einem bis zwei Sätzen auf. (2 P)
 Bei reellen Signalen muss nur eine Hälfte der DFT plus ein Element berechnet und gespeichert werden. Die andere lässt sich rekonstruieren.

Teil 2 Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und 3 gelöst werden.

Gegeben seien die Signale $u_1(t)$ und $u_2(t)$ mit:

$$u_1(t) = \sin\left(\frac{\pi}{2} f_s t\right), \quad u_2(t) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} f_s t\right).$$

- (d) Geben Sie die Folgen $v_1(n) = u_1(n \cdot \frac{1}{f_s})$ und $v_2(n) = u_2(n \cdot \frac{1}{f_s})$ an, welche durch (3 P)
 Abtastung der Signale $u_1(t)$ und $u_2(t)$ zu den Zeitpunkten $t = n \cdot \frac{1}{f_s}$ mit $n \in \{0, 1, 2, 3\}$ entstehen.

$$v_1(n) = \begin{cases} 0 & , n = 0, \\ 1 & , n = 1, \\ 0 & , n = 2, \\ -1 & , n = 3, \end{cases}$$

$$v_2(n) = \begin{cases} 0 & , n = 0, \\ -1 & , n = 1, \\ 0 & , n = 2, \\ 1 & , n = 3. \end{cases}$$

- (e) Gegen Sie die Fourier-Transformierten $V_{1,4}(\mu) = \text{DFT}\{v_1(n)\}$ und $V_{2,4}(\mu) = \text{DFT}\{v_2(n)\}$ für $M = 4$ und $\mu \in \{0, 1, 2, 3\}$ an. (5 P)

$$V_M(\mu) = \sum_{n=0}^{M-1} v(n)e^{-j\mu\frac{2\pi}{M}n}.$$

$$V_{1,4}(0) = 1 - 1 = 0$$

$$V_{1,4}(1) = -j + -j = -2j$$

$$V_{1,4}(2) = -1 + 1 = 0$$

$$V_{1,4}(3) = j + j = 2j$$

$$V_{2,4}(0) = -1 + 1 = 0$$

$$V_{2,4}(1) = j + j = 2j$$

$$V_{2,4}(2) = 1 - 1 = 0$$

$$V_{2,4}(3) = -j - j = -2j$$

- (f) Bei welchen kontinuierlichen Frequenzen f enthalten die Signale $u_1(t)$ und $u_2(t)$ Anteile? (2 P)

$$u_1(t) = \sin(2\pi f_1 t) = -\sin(-2\pi f_1 t)$$

$$2\pi f_1 t = \pm \frac{\pi}{2} f_s t$$

$$f_1 = \pm \frac{f_s}{4}$$

$$u_2(t) = \sin(2\pi f_2 t) = -\sin(-2\pi f_2 t)$$

$$2\pi f_2 t = \pm \frac{3\pi}{2} f_s t$$

$$f_2 = \pm \frac{3f_s}{4}$$

- (g) Bei welchen diskreten Stützstellen μ enthalten die Folgen $v_1(n)$ und $v_2(n)$ Anteile? Welchen kontinuierlichen Frequenzen f entsprechen diese? (3 P)

Beide Fourier-Transformierten der Folgen haben Anteile bei $\mu_1 = -1$ und $\mu_2 = 1$ Anteile. Die Stützstellen der DFT entsprechen Frequenzen von $f_n = n\frac{f_s}{M}$, $n \in \{\mathbb{Z} \mid |n| \leq \frac{M}{2}\}$. Daher enthalten beide Folgen Anteile bei Frequenzen von $f = \pm \frac{f_s}{4}$.

- (h) Vergleichen Sie ihre Ergebnisse aus den Teilaufgaben (f) und (g). Erklären Sie Ihre Beobachtungen. (2 P)

Während die Frequenzen von $u_1(t)$ und $v_1(n)$ übereinstimmen, ist dies für $u_2(t)$ und $v_2(n)$ nicht der Fall. Der Grund hierfür ist, dass das Abtasttheorem für $u_2(t)$ verletzt wurde ($f_2 = \frac{3}{4}f_s > \frac{1}{2}f_s$, Aliasing).

Teil 3 Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und 2 gelöst werden.

Gegeben seien diskrete Folgen $v_a(n)$ und $v_b(n)$ der Länge $M = M_a = M_b = 3$:

$$v_a(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 1, & n = 1, \\ -2j, & n = 2, \end{cases} \quad v_b(n) = \begin{cases} 4, & n = 0, \\ 5, & n = 1, \\ 2j, & n = 2. \end{cases}$$

- (i) Welche Länge hat jeweils das Ergebnis der zyklischen und der linearen Faltung der beiden oberen Folgen? (2 P)

lineare Faltung: $M_{ab,lin} = M_a + M_b - 1 = 5$,

zyklische Faltung: $M_{ab,zyk} = M = 3$.

- (j) Führen Sie die zyklische Faltung der beiden Folgen durch. (4 P)

$$\begin{aligned} v_a(n) \circledast v_b(n) &= \sum_{\kappa=0}^{M-1} v_a(\kappa)v_b(n - \kappa)_{\text{mod } M}, \\ v_{ab}(0) &= (1 \cdot 4) + (1 \cdot 2j) + (-2j \cdot 5), \\ v_{ab}(0) &= 4 - 8j, \\ v_{ab}(1) &= (1 \cdot 5) + (1 \cdot 4) + (-2j \cdot 2j), \\ v_{ab}(1) &= 13, \\ v_{ab}(2) &= (1 \cdot 2j) + (1 \cdot 5) + (-2j \cdot 4), \\ v_{ab}(2) &= 5 - 6j. \end{aligned}$$

- (k) Gegeben sei das Ergebnis einer zyklischen Faltung einer reellen geraden Folge $v_{re,ge}(n)$ mit einer imaginären geraden Folge $j \cdot v_{im,ge}(n)$. Welche geraden, ungeraden, imaginären und reellen Anteile besitzt die Fourier-Transformierte dieser Faltung? (4 P)

$$\begin{aligned} \text{DFT}\{v_{re,ge}(n)\} &= V_{re,ge}(\mu), \\ \text{DFT}\{j \cdot v_{im,ge}(n)\} &= j \cdot V_{im,ge}(\mu), \\ \text{DFT}\{(v_{re,ge}(n) \circledast (j \cdot v_{im,ge}(n)))\} &= j \cdot V_{re,ge}(\mu) \cdot V_{im,ge}(\mu). \end{aligned}$$

Die Fourier-Transformierte der Faltung ist imaginär und gerade. Das Produkt zweier geraden Funktionen ist eine gerade Funktion.

Aufgabe 3 (34 Punkte)

Teil 1 Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 2 und 3 gelöst werden.

Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$H_1(z) = \frac{3z^2 - \frac{3}{2}z - 9}{z^3 - z^2 - \frac{3}{2}z - 1}$$

eines diskreten Systems.

(a) Berechnen Sie alle Pol- und Nullstellen des Systems $H_1(z)$.

(7 P)

Hinweis: Eine Polstelle liegt bei $z_{\infty,1} = 2$.

- Nullstellen:

$$\begin{aligned} 3z^2 - \frac{3}{2}z - 9 &= 0 \\ z^2 - \frac{1}{2}z - 3 &= 0 \\ \Rightarrow z_{0,1/2} &= \frac{1}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 3} \\ z_{0,1} &= 2 \\ z_{0,2} &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

- Polstellen: Die Polstelle bei $z_{\infty,1} = 2$ ist bereits gegeben. Um die anderen zu berechnen, muss zunächst eine Polynomdivision durchgeführt werden:

$$\begin{array}{r} \left(z^3 - z^2 - \frac{3}{2}z - 1 \right) : (z - 2) = z^2 + z + \frac{1}{2} \\ \underline{-z^3 + 2z^2} \\ z^2 - \frac{3}{2}z \\ \underline{-z^2 + 2z} \\ \frac{1}{2}z - 1 \\ \underline{-\frac{1}{2}z + 1} \\ \phantom{\frac{1}{2}z} 0 \end{array}$$

Bestimmung der weiteren Polstellen:

$$\begin{aligned} z^2 + z + \frac{1}{2} &= 0 \\ \Rightarrow z_{\infty,2/3} &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}} \\ z_{\infty,2} &= -\frac{1}{2} + j\frac{1}{2} \\ z_{\infty,3} &= -\frac{1}{2} - j\frac{1}{2} \end{aligned}$$

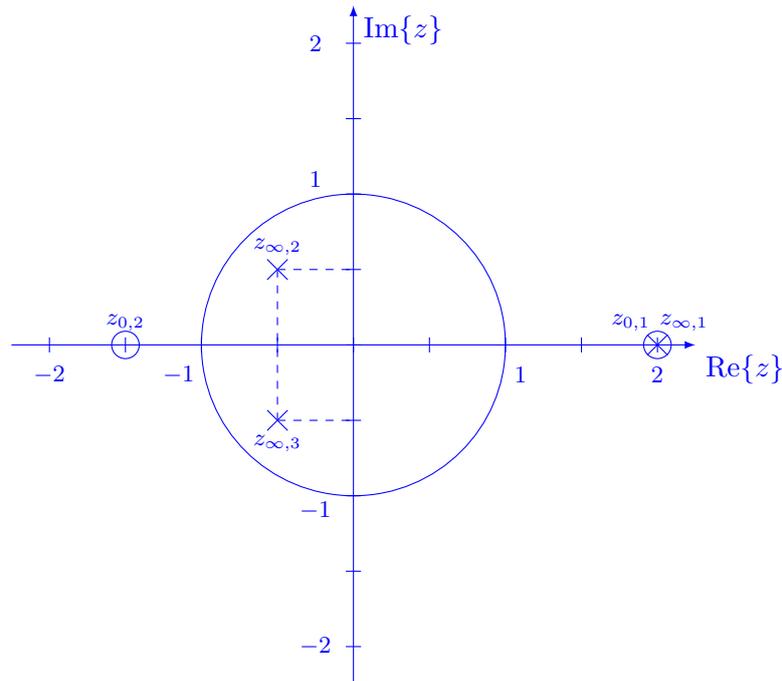


Abbildung 3: Pol-/Nullstellendiagramm des Systems $H_1(z)$.

- (b) Zeichnen Sie das zugehörige Pol-/Nullstellendiagramm. Achten Sie dabei auf eine vollständige Beschriftung. (4 P)
- (c) Ist das System stabil? Begründen Sie Ihre Antwort. (1 P)
 Ja, das System ist stabil. Die Polstelle $z_{\infty,1} = 2$ und die Nullstelle $z_{0,1} = 2$ kompensieren sich. Für die weiteren Polstellen gilt $|z_{\infty,2/3}| < 1$.
- (d) Ist das System minimal- oder maximalphasig? Begründen Sie Ihre Antwort. (1 P)
 Das System ist maximalphasig, da für die Nullstelle $|z_{0,2}| > 1$ gilt. Die Nullstelle $z_{0,1} = 2$ und die Polstelle $z_{\infty,1} = 2$ kompensieren sich und haben daher keinen Einfluss.

Teil 2 Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und 3 gelöst werden.

Gegeben sei die Impulsantwort

$$h_{0,2}(n) = -4\gamma_0(n) + \frac{3}{2}\gamma_{-1}(n) + 4\left(\frac{1}{2}\right)^n \gamma_{-1}(n)$$

eines diskreten Systems.

- (e) Zeichnen Sie die Impulsantwort $h_{0,2}(n)$ im Bereich $n \in [-2, 4]$ mit allen Achsenbeschriftungen. Der Rechenweg zur Bestimmung der Werte muss nicht angegeben werden. (4 P)
- (f) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $H_2(z) = \mathcal{Z}\{h_{0,2}(n)\}$. (3 P)

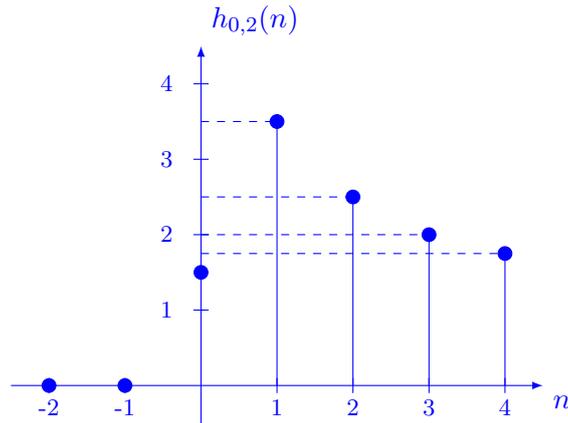


Abbildung 4: Impulsantwort $h_{0,2}(n)$ im Bereich $n \in [-2, 4]$.

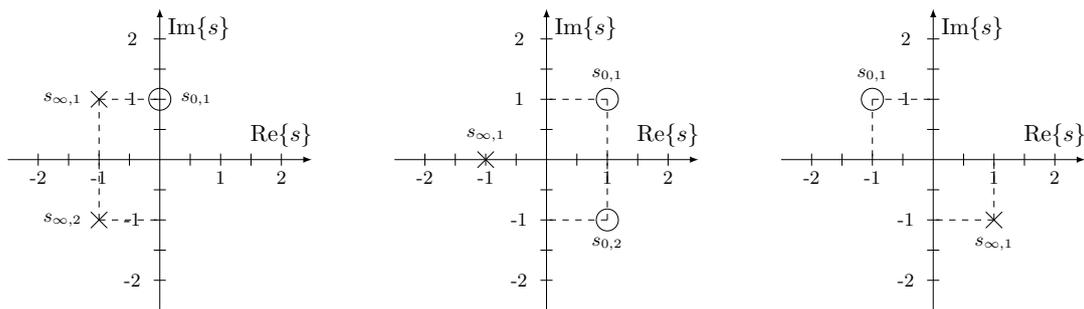
Mit den Korrespondenzen $\gamma_0(n) \circ \bullet 1$, $\gamma_{-1}(n) \circ \bullet \frac{z}{z-1}$ und $a^n \gamma_{-1}(n) \circ \bullet \frac{z}{z-a}$ ergibt sich:

$$h_{0,2}(n) = -4 \gamma_0 + \frac{3}{2} \gamma_{-1}(n) + 4 \left(\frac{1}{2}\right)^n \gamma_{-1}(n)$$

$$H_2(z) = -4 + \frac{3}{2} \frac{z}{z-1} + 4 \frac{z}{z-\frac{1}{2}}$$

Teil 3 Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von Teil 1 und 2 gelöst werden.

Gegeben seien die drei Pol-/Nullstellendiagramme der kontinuierlichen Systeme $H_3(s)$, $H_4(s)$ und $H_5(s)$ in Abbildung 5.



(a) PN-Diagramm von $H_3(s)$. (b) PN-Diagramm von $H_4(s)$. (c) PN-Diagramm von $H_5(s)$.

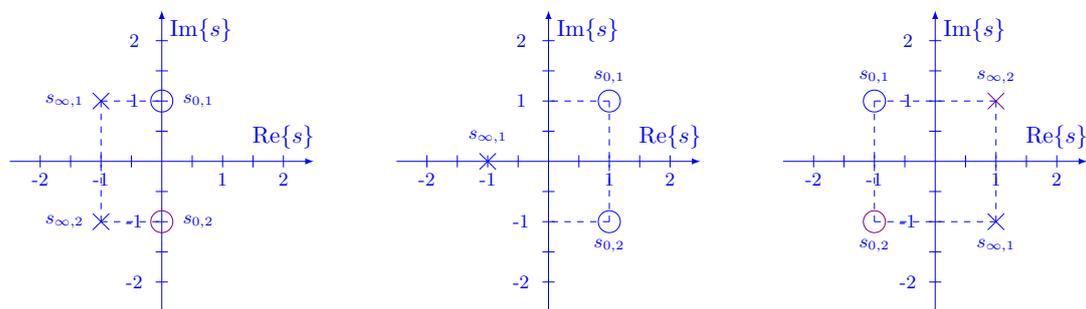
Abbildung 5: Pol-/Nullstellendiagramme kontinuierlicher Systeme.

(g) Was muss erfüllt sein, damit ein System reellwertig ist? Geben Sie für jedes System (4 P) aus Abbildung 5 mit einer kurzen Begründung an, ob dieses reellwertig ist.

Damit ein System reellwertig ist, müssen alle Pol- und Nullstellen reell sein oder als konjugiert komplexes Paar vorliegen.

- $H_3(s)$ ist nicht reellwertig, da $s_{0,1}$ komplexwertig ist und nicht als konjugiert komplexes Paar vorliegt.
- $H_4(s)$ ist reellwertig, da oben genannte Bedingung erfüllt ist.
- $H_5(s)$ ist nicht reellwertig, da sowohl $s_{0,1}$ als auch $s_{\infty,1}$ komplexwertig sind und nicht als konjugiert komplexes Paar vorliegen.

- (h) Ergänzen Sie das/die nicht reellwertige/n System/e mit einer minimalen Anzahl an Pol- und Nullstellen so, dass diese/s reellwertig wird/werden. Sie können die Pol- und Nullstellen in Abbildung 5 einzeichnen. (3 P)



(a) PN-Diagramm von $H_3(s)$. (b) PN-Diagramm von $H_4(s)$. (c) PN-Diagramm von $H_5(s)$.

Abbildung 6: Pol-/Nullstellendiagramme kontinuierlicher, reellwertiger Systeme.

- (i) Was muss erfüllt sein, damit ein kontinuierliches System stabil ist? Geben Sie für jedes System aus Abbildung 5 mit einer kurzen Begründung an, ob dieses stabil ist. Berücksichtigen Sie dabei die ergänzten Pol- und Nullstellen. (4 P)

Ein kontinuierliches System ist stabil, wenn die Bedingungen $\text{Re}\{s_{\infty,i}\} < 0 \forall i$ und Zählergrad $H(s) \leq$ Nennergrad $H(s)$ erfüllt sind.

- $H_3(s)$ ist stabil, da beide Bedingungen erfüllt sind.
- $H_4(s)$ ist nicht stabil, da der Zählergrad größer als der Nennergrad ist.
- $H_5(s)$ ist nicht stabil, da die Polstellen auf der rechten Halbebene liegen.

- (j) Geben Sie die Übertragungsfunktion des Systems $H_3(s)$ in Polynomdarstellung an. Berücksichtigen Sie dabei mögliche ergänzte Pol- und Nullstellen. Es gilt $H_3(1) = \frac{4}{5}$. (3 P)

$$H_3(s) = C \frac{(s - j)(s + j)}{(s - (-1 + j))(s - (-1 - j))}$$

$$H_3(s) = C \frac{s^2 + 1}{s^2 + 2s + 2}$$

$$H_3(1) = C \frac{2}{5} \stackrel{!}{=} \frac{4}{5} \Rightarrow C = 2$$

$$H_3(s) = \frac{2s^2 + 2}{s^2 + 2s + 2}$$

Dies ist eine leere Seite.