

# Digitale Signalverarbeitung

## Teil 3: Spektren

**Gerhard Schmidt**

Christian-Albrechts-Universität zu Kiel

Technische Fakultät

Elektrotechnik und Informationstechnik

Digitale Signalverarbeitung und Systemtheorie



## Inhalt des Abschnittes

- ❑ Einführung
- ❑ Signale
- ❑ **Spektren**
  - ❑ **Definitionen**
  - ❑ **Faltung und Faltungssätze**
  - ❑ **Schnelle Berechnung der Diskreten Fourier Transformation (Fast Fourier Transform – FFT)**
  - ❑ **Spektralanalyse unendlich langer Signale und Prozesse**
  - ❑ **Stochastische Signale (Zufallsprozesse)**
- ❑ Digitale Filter

## Diskrete Signale

Im Rahmen dieser Vorlesung werden wir uns vor allem mit **diskreten Signalen** befassen. Mit Hilfe von Transformationen werden wir ein Signal  $v(n)$  in Anteile der Formen

- $V e^{j\Omega n}$  (harmonische Exponentialfolgen),
- $V z^n$  (allgemeine komplexe Exponentialfolgen) oder
- $V e^{j\mu \frac{2\pi}{M} n}$  (periodische Exponentialfolgen)

zerlegen.

## Fourier-Transformation für diskrete Signale:

$$V(e^{j\Omega}) = \mathcal{F}\{v(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v(n) e^{-j\Omega n},$$

$$v(n) = \mathcal{F}^{-1}\{V(e^{j\Omega})\} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega=-\pi}^{\pi} V(e^{j\Omega}) e^{j\Omega n} d\Omega.$$

**Z-Transformation:**

$$V(z) = \mathcal{Z}\{v(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v(n) z^{-n},$$
$$v(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{V(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint V(z) z^n \frac{dz}{z}.$$

**Diskrete Fourier-Transformation:**

$$V_M(\mu) = \text{DFT}\{v(n)\} = \sum_{n=0}^{M-1} v(n) e^{-j\mu \frac{2\pi}{M} n},$$
$$v(n) = \text{IDFT}\{V_M(\mu)\} = \frac{1}{M} \sum_{\mu=0}^{M-1} V_M(\mu) e^{j\mu \frac{2\pi}{M} n}.$$

**Die DFT und die IDFT sind implizit periodisch (Fourier-Reihen für periodische Folgen).  
Wir werden diese Transformationsart nun noch genauer untersuchen!**

### Faltungsdefinitionen

Die **Faltung** ist eine zentrale Operation in der digitalen Signalverarbeitung. Im Rahmen der Vorlesung „Signale und Systeme“ haben Sie die Faltung als **lineare, verschiebungsinvariante Filterung** kennengelernt.

Wir unterscheiden im Folgenden nun zwischen der...

- **linearen Faltung** von zwei reellen Folgen  $v(n) \in \mathbb{R}$  und  $h(n) \in \mathbb{R}$  gemäß

$$\begin{aligned} y(n) &= h(n) * v(n) = v(n) * h(n) \\ &= \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} h(\kappa) v(n - \kappa) = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} v(\kappa) h(n - \kappa) \end{aligned}$$

- und der **zyklischen Faltung** von zwei reellen, periodischen Folgen  $v(n) = v(n + \lambda M) \in \mathbb{R}$  und  $h(n) = h(n + \lambda M) \in \mathbb{R}$  (gleiche Periodendauer) gemäß

$$\begin{aligned} y(n) &= h(n) \circledast v(n) = v(n) \circledast h(n) \\ &= \sum_{\kappa=n_0}^{n_0+M-1} h(\kappa) v(n - \kappa) = \sum_{\kappa=n_0}^{n_0+M-1} v(\kappa) h(n - \kappa). \end{aligned}$$

Man beachte, dass man hier den „Signalzugriff“ auf eine Periode beschränken kann, wenn man eine Modulo-Adressierung einführt!

## Verständnisfragen

### Partnerarbeit:

Versuchen Sie in Partnerarbeit folgende Aufgaben zu lösen:

- Geben Sie die Ausgangsfolge an, die entsteht wenn Sie das Signal  $v = [1, 2, 3]^T$  und die Impulsantwort  $h = [-1, 0, 1]^T$  linear falten!

.....  
.....  
.....

- Führen Sie für das gleiche Signal bzw. die gleiche Impulsantwort wie oben eine zyklische Faltung durch und geben Sie nun das Ergebnis an!

.....  
.....  
.....

### Faltungssätze – Teil 1

Aus der Vorlesung „Signale und Systeme“ kennen Sie die folgenden **Zusammenhänge zwischen der Faltung im Zeitbereich und den entsprechenden Operationen im Spektralbereich**. Hier gilt

□ für die **Fourier-Transformation diskreter Signale**:

$$\begin{aligned} v(n) & \circ \text{---} \bullet & V(e^{j\Omega}), \\ h(n) & \circ \text{---} \bullet & H(e^{j\Omega}), \\ v(n) * h(n) & \circ \text{---} \bullet & V(e^{j\Omega}) H(e^{j\Omega}). \end{aligned}$$

□ für die **z-Transformation**:

$$\begin{aligned} v(n) & \circ \text{---} \bullet & V(z), \\ h(n) & \circ \text{---} \bullet & H(z), \\ v(n) * h(n) & \circ \text{---} \bullet & V(z) H(z). \end{aligned}$$

### Faltungssätze – Teil 2

Für die Diskrete Fourier-Transformation gilt allerdings (wegen der impliziten Periodizitäten):

$$\begin{aligned}
 v(n) & \circ \text{---} \bullet V_M(\mu), \\
 h(n) & \circ \text{---} \bullet H_M(\mu), \\
 v(n) \circledast h(n) & \circ \text{---} \bullet V_M(\mu) H_M(\mu).
 \end{aligned}$$

 **Zyklische Faltung!**

D.h. es existiert bisher **keine unmittelbare Umsetzung der linearen Faltung**. Dennoch wäre dies eine sehr **wünschenswerte** Operation, da die **DFT** die einzige Transformation ist, die aus einem punktweise gegebenem Signal (Messung) eine **praktisch berechenbare Spektraldarstellung** (endliche Summen) erzeugt.

### Faltung von Folgen endlicher Länge – Teil 1

Gegeben seien **zwei endliche Folgen**

$$v(n), n \in \{0, 1, \dots, M_v - 1\},$$

$$h(n), n \in \{0, 1, \dots, M_h - 1\}.$$

*Außerhalb des angegebenen Bereiches soll die Folge Null sein!*

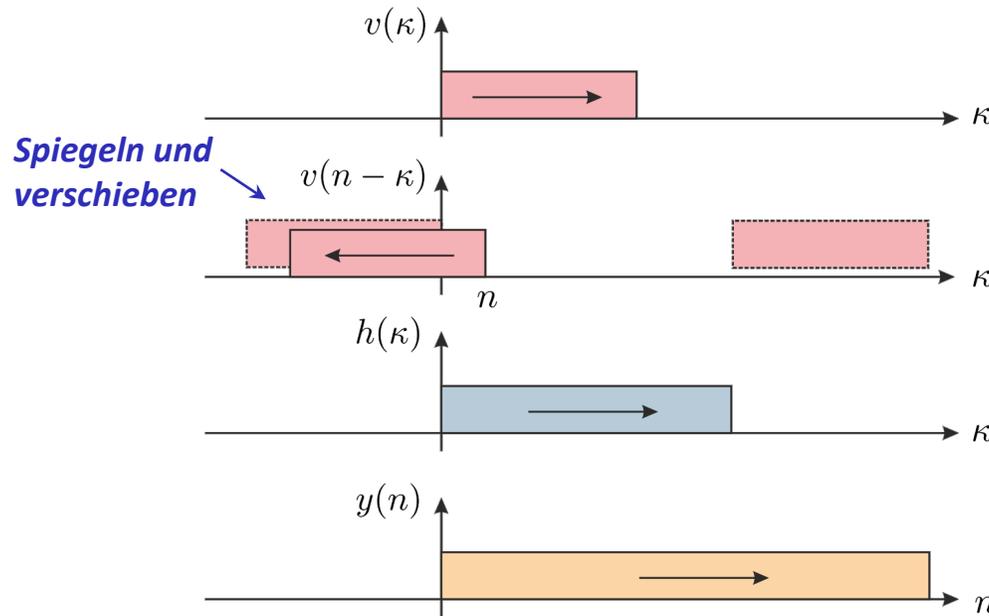
Diese werden mittels einer **Faltung** in eine (ebenfalls endliche) Folge „umgewandelt“:

$$\begin{aligned} y(n) &= v(n) * h(n) \\ &= \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} h(\kappa) v(n - \kappa) \\ &= \sum_{\kappa=0}^{M_h-1} h(\kappa) v(n - \kappa), \end{aligned}$$

mit  $n \in \{0, 1, \dots, M_y - 1\}$ .

### Faltung von Folgen endlicher Länge – Teil 2

Graphische Veranschaulichung:



**Für kontinuierliche, endlich lange Signale mit den Längen  $L_v$  bzw.  $L_h$  ist bekannt: Die Faltungslänge beträgt  $L_y = L_v + L_h$ .**

**Die Aussage „Bei der Faltung addieren sich die Signallängen!“ gilt im Diskreten (fast) wie im Kontinuierlichen.**

Als **Länge der Ergebnisfolge** ergibt sich  $M_y = M_v + M_h - 1$ .

### Gemeinsame Darstellung endlicher und zyklischer Folgen – Teil 1

Die folgende Darstellung kann einheitlich für

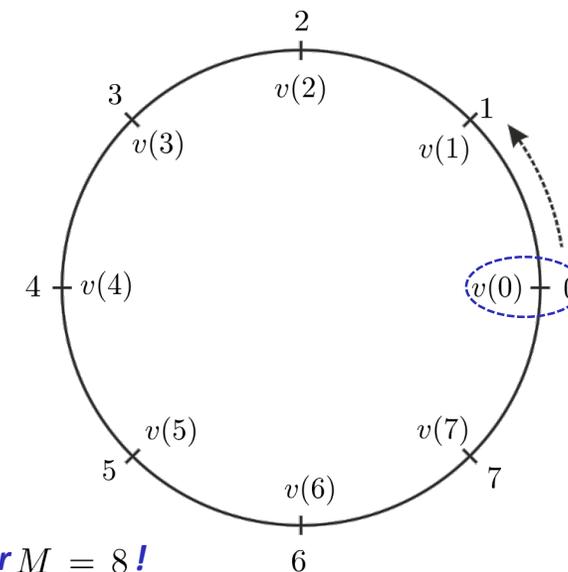
- ❑ ein **endlich langes Signal**  $v(n)$  der Länge  $M$  und für
- ❑ ein **periodisches Signal**  $v(n) = v(n + \lambda M)$  der Periode  $M$

verwendet werden.

Die **Vorteile** dieser Darstellung:

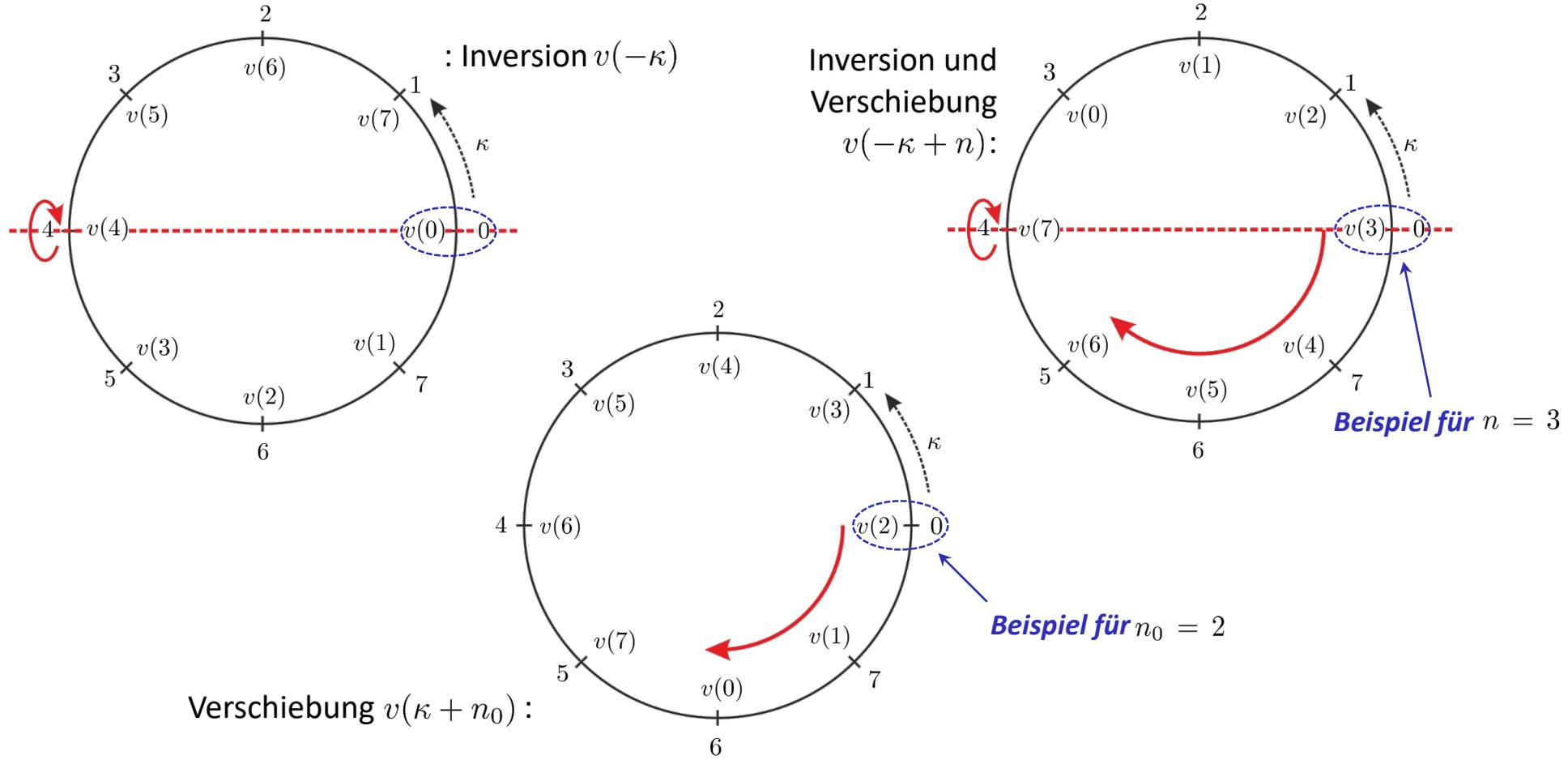
- ❑ Eine **Inversion**  $[v(-\kappa)]$ ,
- ❑ eine **Verschiebung**  $[v(\kappa + n_0)]$
- ❑ sowie eine **Inversion und eine Verschiebung**  $[v(n_0 - \kappa)]$

können leicht interpretiert werden.



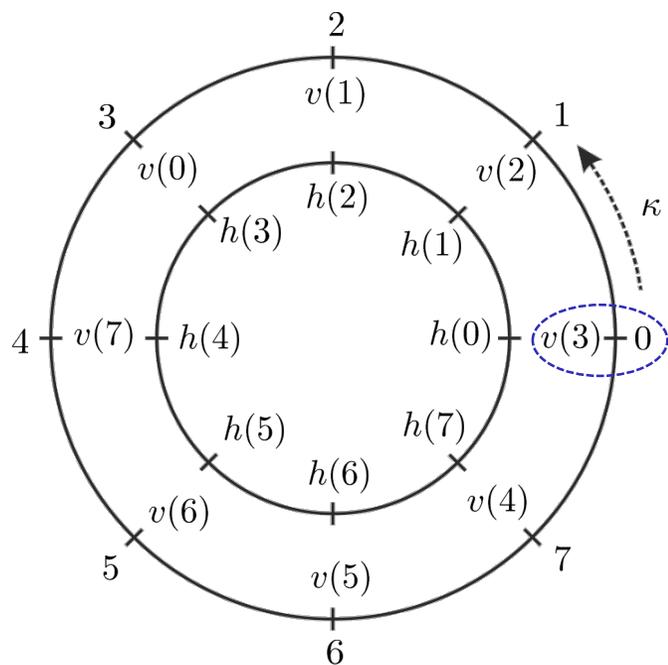
Darstellung für  $M = 8!$

### Gemeinsame Darstellung endlicher und zyklischer Folgen – Teil 2



### Gemeinsame Darstellung endlicher und zyklischer Folgen – Teil 3

Die zyklische Faltung zweier Folgen kann nun durch ein solches **Doppeldiagramm** dargestellt werden. Dabei wird nur der **äußere Teil gedreht bzw. gespiegelt**, der **innere Teil bleibt fest**.



**Beispiel für den Ausgang  $y(3)$ :**

$$y(3) = v(3)h(0) + v(2)h(1) + \dots + v(0)h(3) + v(7)h(4) + \dots + v(4)h(7)$$

**Mit dem Diagramm wird noch einmal deutlich, dass das Ausgangssignal  $y(n)$  ebenfalls periodisch ist und zwar mit Periode  $M_y = M_v = M_h$ ! Es gibt hier also keine „Längenaddition“ wie bei der linearen Faltung.**

### Überführung der zyklischen Faltung in eine lineare Faltung – Teil 1

Bei der **linearen Faltung** entsteht das endliche Signal  $y_{\text{lin}}(n)$  offenbar dadurch, dass **vor und hinter dem Eingangssignal bzw. der Impulsantwort Nullwerte** liegen. Im Gegensatz dazu werden bei der zyklischen Faltung die Signalwerte bzw. die Werte der Impulsantwort wiederholt.

Es stellt sich nun die Frage:

**Wann ergibt die zyklische Faltung die selben  $M_y$  Ergebniswerte wie die lineare Faltung?**

Für die Antwort kann zunächst festgehalten werden, dass die Ergebnisperiode  $M_y$  die Faltungslänge  $M_v + M_h - 1$  aufnehmen können muss, d.h. es muss gelten:

$$M_y \geq M_v + M_h - 1.$$

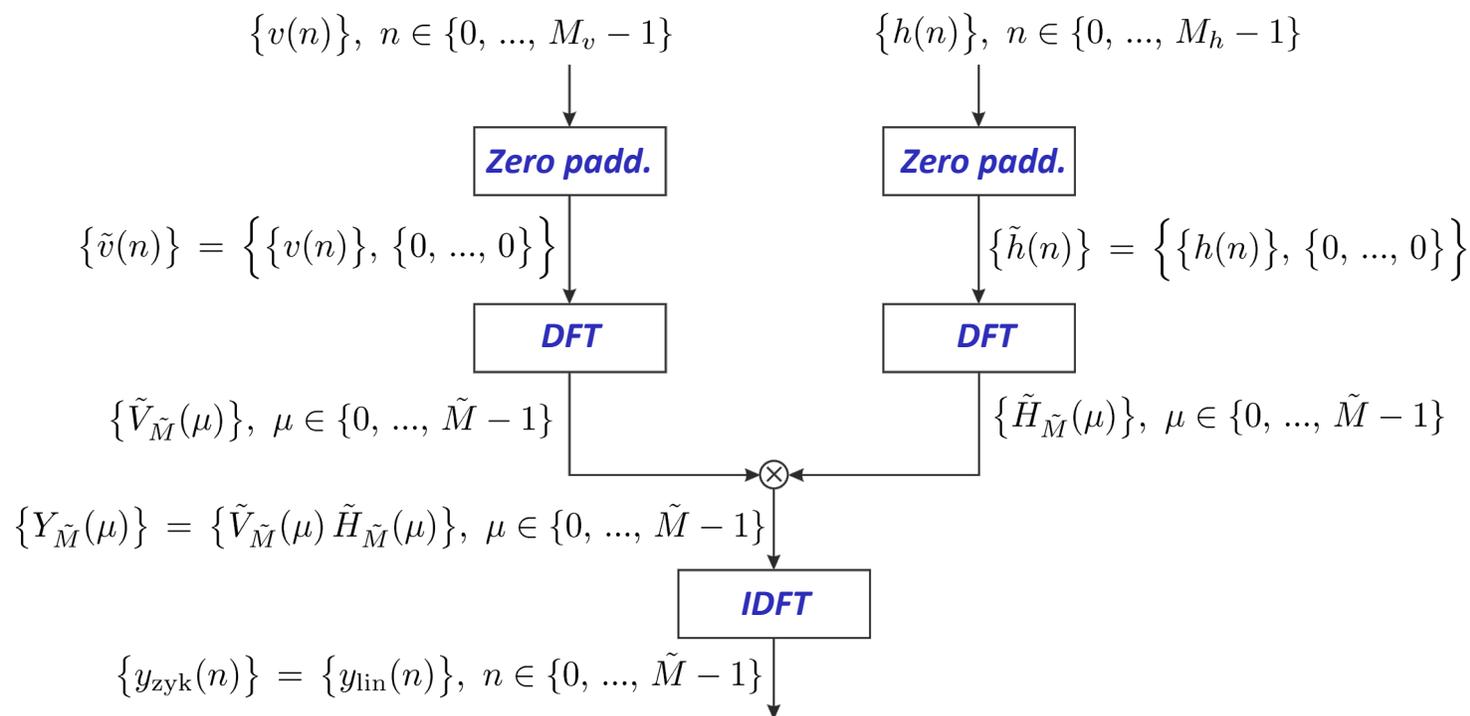
Dies kann man erreichen, wenn man die Periodendauern von  $v(n)$  und  $h(n)$  künstlich so erhöht, dass gilt:

$$\tilde{M} = \tilde{M}_v = \tilde{M}_h \geq M_v + M_h - 1.$$

### Überführung der zyklischen Faltung in eine lineare Faltung – Teil 2

Diese Periodenverlängerung kann durch Auffüllen der Folgen durch Nullwerte (sog. **zero padding**) erreicht werden. In diesem Fall sind die **Ergebnisse der beiden Faltungsarten identisch**.

Dadurch kann dann auch **die Faltung zweier endlich langer Folgen mit Hilfe der DFT und des Faltungssatzes ausgeführt** werden (siehe rechts).

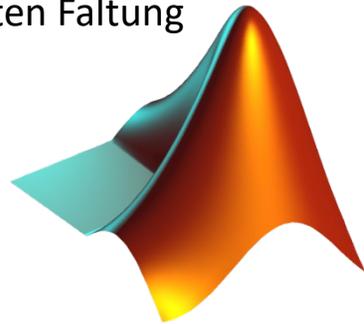


## Faltung und Faltungssätze – Teil 11

### Überführung der zyklischen Faltung in eine lineare Faltung – Teil 3

Man beachte, dass man durchaus *auch mehr Nullen als notwendig anfügen darf* – man nähert sich dadurch immer mehr dem Fall der linearen Faltung!

Verdeutlichung der DFT-basierten Faltung  
(gemeinsam) in Matlab ...



### ***Überführung der zyklischen Faltung in eine lineare Faltung – Teil 4***

Bei der Realisierung einer linearen Faltung im DFT-Bereich kommt natürlich die Frage nach dem Rechenaufwand auf:

***Ist es aufwändiger zwei DFTs, eine IDFT und eine Spektralmultiplikation durchzuführen als die entsprechenden Zeitbereichsoperationen?***

Die Antwort werden wir noch einige Folien schuldig bleiben, da es hier entscheidend darauf ankommt, ob man die DFT bzw. IDFT effizient berechnen kann.

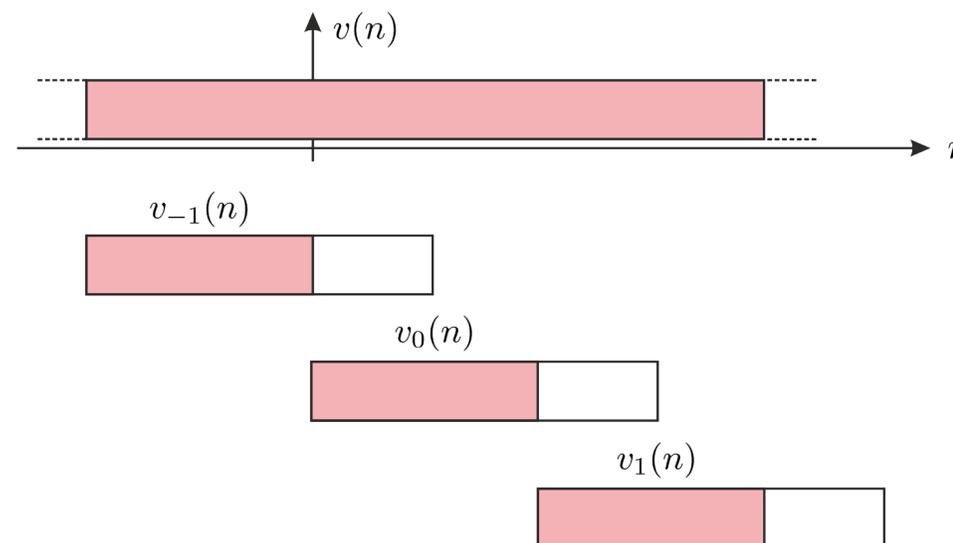
Zunächst wollen wir uns nun aber noch mit der Frage beschäftigen, ob eine solche ***DFT-Bereichs-Lösung*** auch ***für Signale anwendbar*** ist, ***die nicht endlich sind***.

### Faltung einer endlichen und einer unendlichen Folge – Teil 1

In der Praxis kommt es häufig vor, dass ein **Signal**  $v(n)$  **unendlicher** (oder zumindest beliebig großer) **Länge** mit einer Impulsantwort  $h_0(n)$  eines Filter gefaltet werden soll. Die **Impulsantwort des Filters** kann dabei oft näherungsweise (oder sogar auch exakt) als **endlich** angenommen werden.

Sollte sich herausstellen, dass die zyklische Faltung effizient im DFT-Bereich realisiert werden kann, so ist es natürlich auch von Interesse den o.g. Fall mit zyklischen Faltungen umzusetzen.

Wir werden hierzu das **Eingangssignal in Blöcke aufteilen** und diese dann jeweils mit einer entsprechenden **Anzahl von Nullen auffüllen**.



**Faltung einer endlichen und einer unendlichen Folge – Teil 2**

Im Detail verwendet man dabei folgendes Vorgehen:

- **Blockbildung** für das Signal

$$v_\nu(n) = v(n + \nu M_v), \quad n \in \{0, 1, \dots, M_v - 1\}, \quad \nu \in \mathbb{Z}.$$

- **Zero padding** für die Blöcke und für die Impulsantwort

$$v_\nu(n) \longrightarrow \tilde{v}_\nu(n),$$

$$h_0(n) = h(n) \longrightarrow \tilde{h}(n).$$

- Durchführung der **Faltung im DFT-Bereich**

$$y_\nu(n) = \text{IDFT} \left\{ \text{DFT} \{ \tilde{v}_\nu(n) \} \cdot \text{DFT} \{ \tilde{h}(n) \} \right\}.$$

- **Zusammenfügen** der Blöcke durch einfache Addition

$$y(n) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} y_\nu(n - \nu M_V).$$

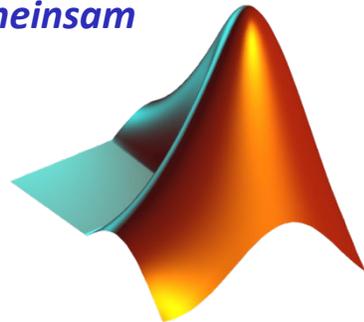
## Faltung und Faltungssätze – Teil 15

### *Faltung einer endlichen und einer unendlichen Folge – Teil 3*

Man beachte, dass die Ergebnisvektoren länger sind als  $M_v$ , d.h. die *Ergebnisblöcke überlappen sich beim Addieren*. Daher wird dieses Verfahren auch als *overlap-add-Verfahren* bezeichnet.

Zur Verdeutlichung dieses Prinzips wollen wir ein Musiksignal klanglich beeinflussen. Es sollen dabei die Tiefen und die Höhen etwas angehoben werden.

*Durchführung gemeinsam  
in Matlab!*



## Faltung und Faltungssätze – Teil 16

### *Faltung einer endlichen und einer unendlichen Folge – Teil 4*

Die bisherigen Überlegungen sind nur im Zusammenhang mit einer **effizienten Berechnung der DFT bzw. IDFT** sinnvoll – ansonsten wäre die Faltung im DFT-Bereich (man beachte das Blockdiagramm einige Folien vorher) zu rechenaufwändig.

Aber auch sonst ist eine effiziente Berechnung der DFT/IDFT von besonderem Interesse da ...

- ❑ die DFT bisher die einzig exakt berechenbare Spektraltransformation (die hier bisher behandelt wurde) darstellt (keine unendlichen Summen oder Integrale).
- ❑ die DFT **Abtastwerte** der Fourier- und der z-Transformation **bei endlich langen Signalen** liefert.
- ❑ die DFT **Näherungswerte** der Fourier- und der z-Transformation **bei unendlich langen Signalen** liefert.

### Grundlagen – Teil 1

Will man den **Rechenaufwand** einer vollständigen DFT-Berechnung für den Fall  $v(n) \in \mathbb{C}$  und  $V_M(\mu) \in \mathbb{C}$  bestimmen, so ergibt sich

$$V_M(\mu) = \underbrace{\sum_{n=0}^{M-1} \underbrace{v(n) \cdot e^{-j\mu \frac{2\pi}{M} n}}_{1 \text{ kompl. Mult.}}}_{M \text{ kompl. Multpl.}} \quad \text{mit} \quad \underbrace{\mu \in \{0, 1, \dots, M-1\}}_{M \text{ Ergebniswerte}}.$$

Insgesamt benötigt man pro DFT etwa  $M^2$  komplexe Multiplikationen und Additionen.

### Bemerkungen (Teil 1):

- ❑ 1 komplexe Multiplikation  $\rightarrow$  4 reelle Multiplikationen + 2 reelle Additionen,  
1 komplexe Addition  $\rightarrow$  2 reelle Additionen.
- ❑ Ein genauerer Blick zeigt, dass nicht alle Operationen die volle Komplexität benötigen:
  - ❑  $M$  Werte müssen addiert werden  $\Rightarrow (M - 1)$  Additionen,
  - ❑ für die Faktoren  $e^{j0}$ ,  $e^{j\pi\lambda}$ ,  $e^{\pm j\lambda\pi/2}$  wird keine Multiplikation benötigt,
  - ❑ für  $\mu = 0$  sind keine Multiplikationen notwendig.

## Grundlagen – Teil 2

### Bemerkungen (Teil 2):

- ❑ Multiplikationen und Additionen sind nicht die einzigen Kriterien für den Rechenaufwand.
- ❑ Speicherzugriffe, Bedingungsabfragen, etc. sind genauso wichtig
- ❑ Aufwandsmaße sollten an die verwendete (zu verwendende) Hardware angepasst sein.

### Grundidee zur Reduktion des Rechenaufwands:

Die Grundidee zur Reduktion des Rechenaufwands der DFT besteht darin, das „**große Problem**“ in mehrere „**kleinere Probleme**“ zu **zerlegen** – mit der Hoffnung auf eine Aufwandsreduktion.

Dieses Vorgehen muss natürlich für jeden Einzelfall geprüft werden.

**Radix-2-Verfahren (Dezimation im Zeitbereich) – Teil 1**

Für effiziente DFT-Umsetzungen werden **Eigenschaften** der sog. *Twiddle*-Faktoren  $W_M^{\mu n} = e^{-j\mu \frac{2\pi}{M} n}$  ausgenutzt. Im Besonderen sind dies

- die konjugiert komplexe **Symmetrie**

$$W_M^{-\mu n} = \left[ W_M^{\mu n} \right]^*$$

- und die **Periodizität** sowohl für  $n$  als auch für  $\mu$

$$W_M^{\mu n} = W_M^{\mu(n+\lambda M)} = W_M^{(\mu+\lambda M)n}.$$

Für die Radix-2-Umsetzung der DFT **zerlegen** wir zunächst die Eingangsfolge **in zwei Teilfolgen halber Länge**:

$$v_1(n) = v(2n),$$

$$v_2(n) = v(2n + 1),$$

$$\text{jeweils mit } n \in \left\{0, 1, \dots, \frac{M}{2} - 1\right\}.$$

### Radix-2-Verfahren (Dezimation im Zeitbereich) – Teil 2

Setzen wir nun voraus, dass die ursprüngliche Folge **eine gerade Anzahl an Werten** besaß, so können wir die DFT der ursprünglichen Folge wie folgt aufteilen:

$$V_M(\mu) = \sum_{n=0}^{M-1} v(n) \overbrace{e^{-j\frac{2\pi}{M}\mu n}}^{W_M^{\mu n}}, \quad \mu \in \{0, 1, \dots, M-1\}$$

... Einsetzen der Definition der Twiddle-Faktoren ...

$$= \sum_{n=0}^{M-1} v(n) W_M^{\mu n}$$

... Aufteilung in eine Summe der geraden Indizes und eine der ungeraden ...

$$= \sum_{n=0}^{M/2-1} \underbrace{v(2n)}_{v_1(n)} W_M^{2\mu n} + \sum_{n=0}^{M/2-1} \underbrace{v(2n+1)}_{v_2(n)} W_M^{\mu(2n+1)}$$

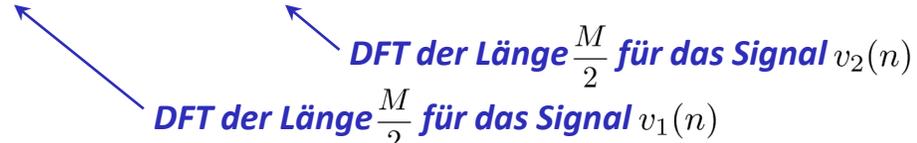
... Einsetzen der Teilsignaldefinitionen (siehe letzte Folie) ...

$$= \sum_{n=0}^{M/2-1} v_1(n) \underbrace{W_M^{2\mu n}}_{W_{M/2}^{\mu n}} + W_M^{\mu} \sum_{n=0}^{M/2-1} v_2(n) \underbrace{W_M^{2\mu n}}_{W_{M/2}^{\mu n}}$$

### Radix-2-Verfahren (Dezimation im Zeitbereich) – Teil 3

DFT-Zerlegung (Fortsetzung)

$$\begin{aligned}
 V_M(\mu) &= \sum_{n=0}^{M/2-1} v_1(n) \underbrace{W_M^{2\mu n}}_{W_{M/2}^{\mu n}} + W_M^\mu \sum_{n=0}^{M/2-1} v_2(n) \underbrace{W_M^{2\mu n}}_{W_{M/2}^{\mu n}} \\
 &\quad \dots \text{Einsetzen der Definition der DFT (halber Ordnung)} \dots \\
 &= V_{M/2,1}(\mu) + W_M^\mu V_{M/2,2}(\mu).
 \end{aligned}$$



Man beachte, dass diese Zerlegung aufgrund der Periodizität von  $V_{M/2,1}(\mu)$  bzw.  $V_{M/2,2}(\mu)$  auch für  $\mu \geq M/2$  gilt!

### Radix-2-Verfahren (Dezimation im Zeitbereich) – Teil 4

Für die **Rechenleistung** können wir festhalten:

❑ **Ursprünglich:**

1 DFT der Ordnung  $M$   $\longrightarrow$   $M^2$  Operationen

❑ **Mit der Zerlegung:**

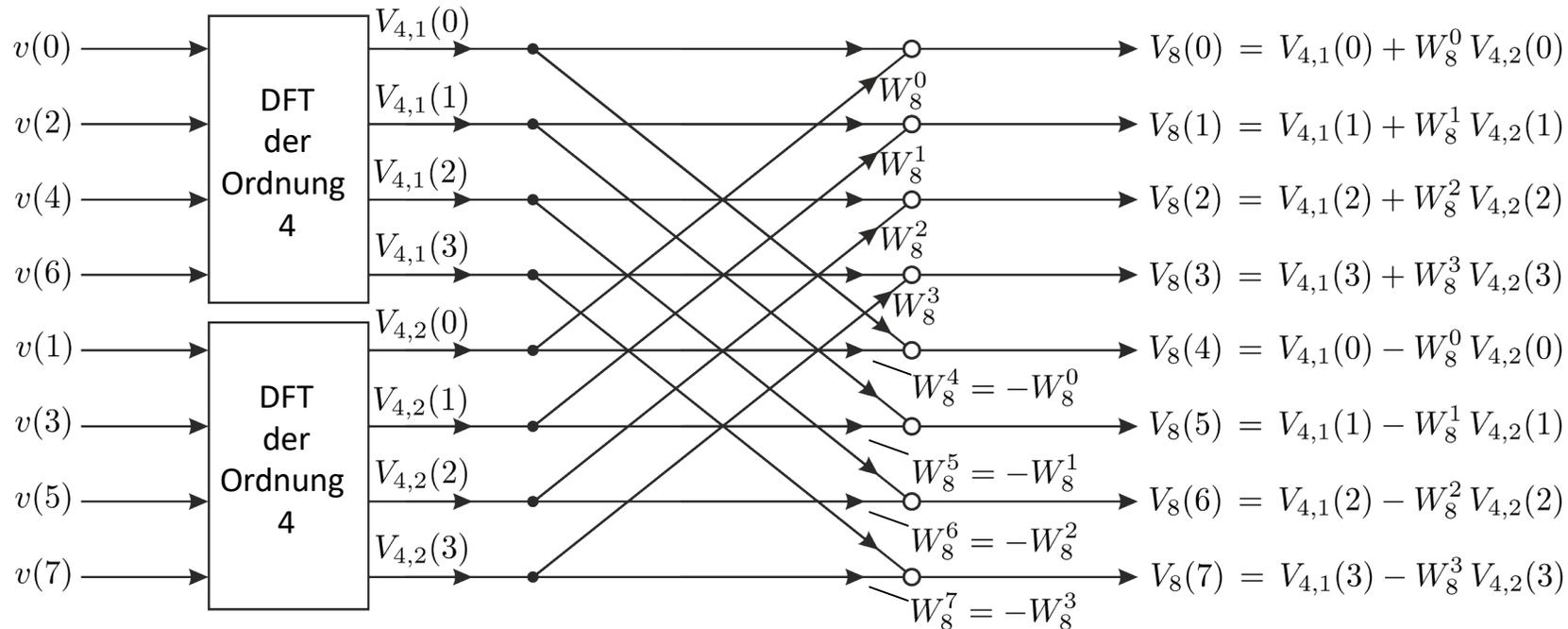
2 DFTs der Ordnung  $M/2$   $\longrightarrow$   $2 \left(\frac{M}{2}\right)^2 = \frac{2M^2}{4} = \frac{M^2}{2}$  Operationen

eine Ergebniskombination  $\longrightarrow$   $M$  Operationen

**Mit dieser Umformung konnte man somit die Komplexität von  $M^2$  auf  $\frac{1}{2}M^2 + M$  Operationen senken.  
Für große  $M$  entspricht dies nahezu einer Halbierung!**

### Radix-2-Verfahren (Dezimation im Zeitbereich) – Teil 5

Graphische Veranschaulichung der (ersten Stufe der) Zerlegung für  $M = 8$  :



**Radix-2-Verfahren (Dezimation im Zeitbereich) – Teil 6**

Diese **Idee** kann man **erneut anwenden**. Hierfür muss dann auch  $M/2$  wieder gerade sein. Somit erhält man dann 4 DFTs der Ordnung  $M/4$  und wiederum  $M$  Operationen, um die vier DFTs zu den jeweiligen Ausgängen zu verschalten. Zusammen mit den Kombinationsoperationen vom letzten Schritt ergibt sich dann eine **Komplexität** von

$$\frac{M^2}{4} + 2M \text{ komplexen Operationen.}$$

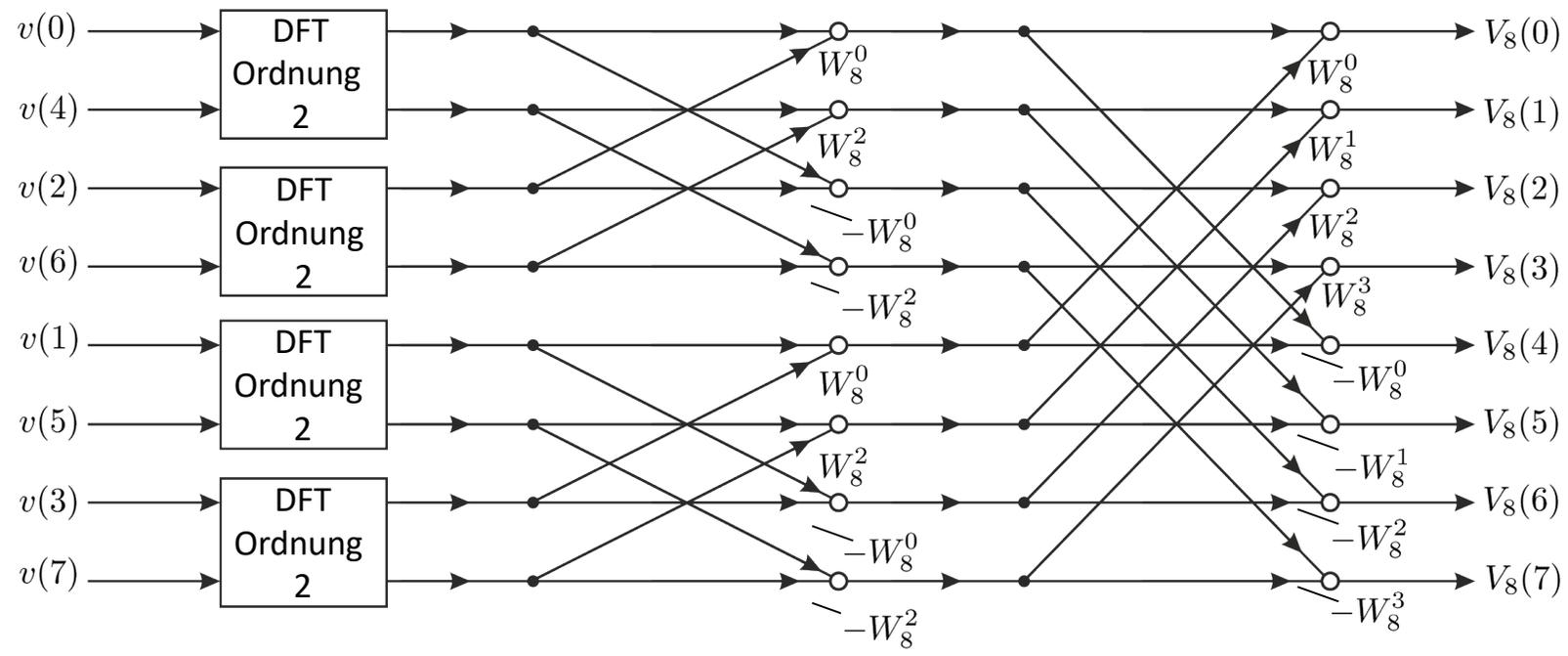
Offensichtlich kann man dieses Vorgehen so oft wiederholen, bis man bei der „Minimallänge“ 2 für eine DFT angekommen ist. Dies geht dann, wenn gilt

$$M = 2^m, \quad \text{mit } m \in \mathbb{N}.$$

Das heißt,  $M$  muss eine **Zweierpotenz** sein!

### Radix-2-Verfahren (Dezimation im Zeitbereich) – Teil 7

Graphische Veranschaulichung der (zweiten Stufe der) Zerlegung für  $M = 8$ :



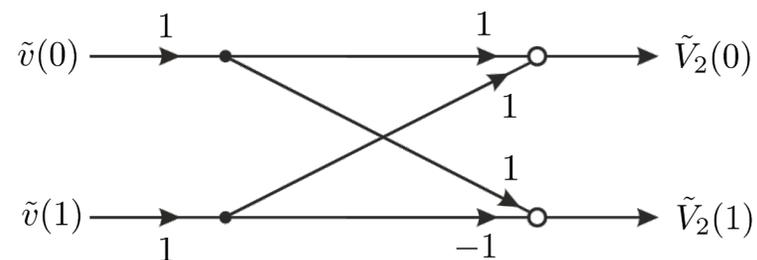
### Radix-2-Verfahren (Dezimation im Zeitbereich) – Teil 8

Als letzten Schritt bleibt nun noch eine **DFT der Ordnung 2** zu berechnen. Hierbei gilt:

$$\tilde{V}_2(0) = \tilde{v}(0) + W_2^0 \tilde{v}(1) = \tilde{v}(0) + \tilde{v}(1),$$

$$\tilde{V}_2(1) = \tilde{v}(0) + W_2^1 \tilde{v}(1) = \tilde{v}(0) - \tilde{v}(1).$$

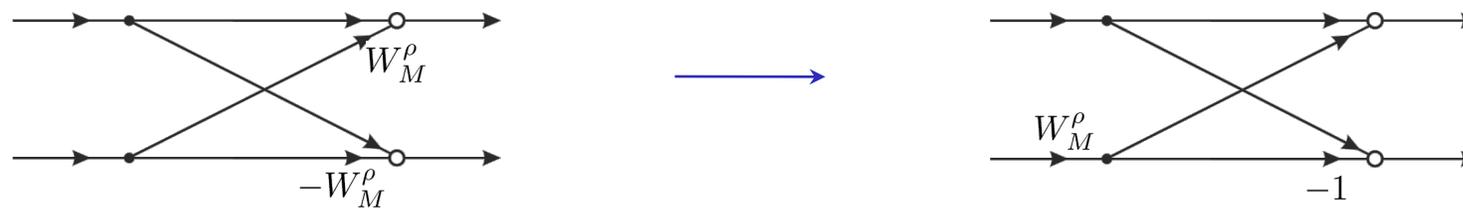
Wie man erkennen kann, gilt auch hier der **Grundbaustein**, welcher bei den vorherigen Zerlegungen eingesetzt wurde:



Man nennt diese Grundstruktur „**butterfly**“ der Radix-2-FFT. Die Abkürzung **FFT** steht hierbei für **Fast Fourier Transform**.

### Radix-2-Verfahren (Dezimation im Zeitbereich) – Teil 9

Bei der Berechnung der einzelnen **butterfly-Operationen** kann noch ausgenutzt werden, dass sich in der direkten Implementierung die Faktoren  $W_M^\rho$  und  $-W_M^\rho$  nur im Vorzeichen unterscheiden. Damit ergibt sich folgende Implementierung:



**Pfade ohne Benennung tragen den Faktor 1!**

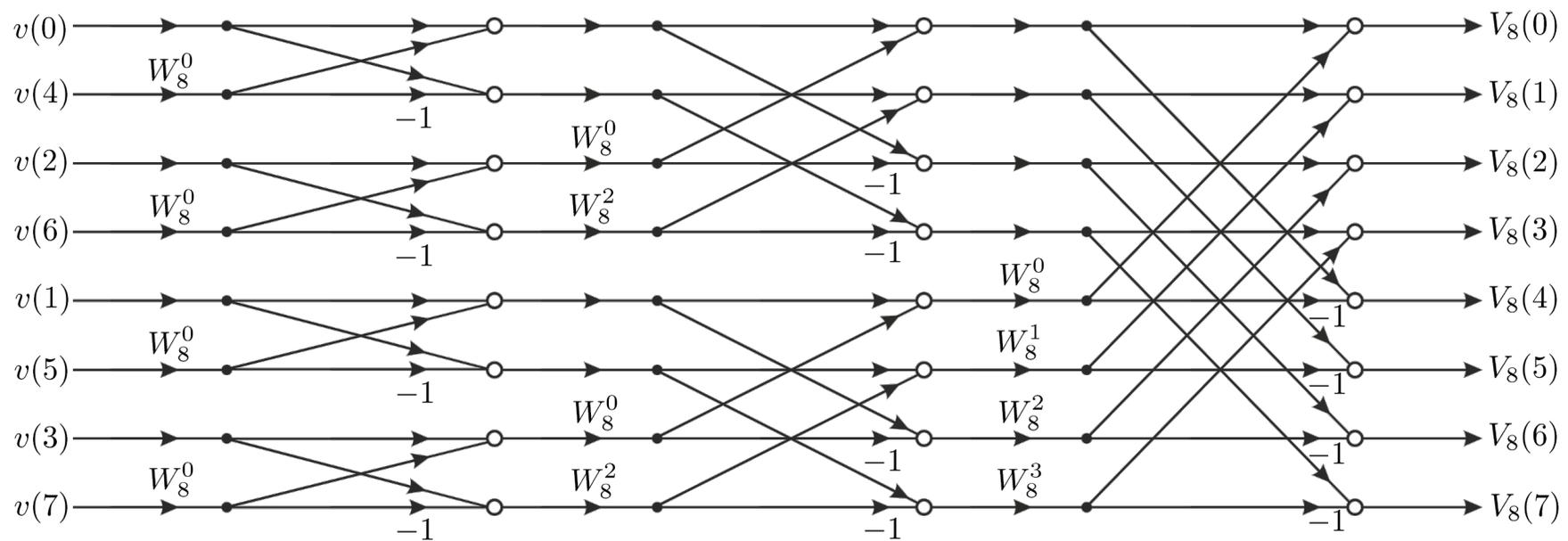
Auf diese Weise kann eine **zusätzliche Halbierung der Multiplikationen** (ohne Zusatz) erreicht werden.

Ansonsten sei noch angeführt, dass sich die Anzahl der notwendigen Operationen für die Bestimmung einer DFT durch die effiziente Radix-2-Implementierung von  $M^2$  auf  $M \log_2 M$  reduzieren ließ.

**Beispiele:**  $M = 32 \rightarrow M^2 \approx 1000, M \log_2 M \approx 160 \rightarrow$  Faktor 6,  
 $M = 1024 \rightarrow M^2 \approx 10^6, M \log_2 M \approx 10^4 \rightarrow$  Faktor 100.

### Radix-2-Verfahren (Dezimation im Zeitbereich) – Teil 10

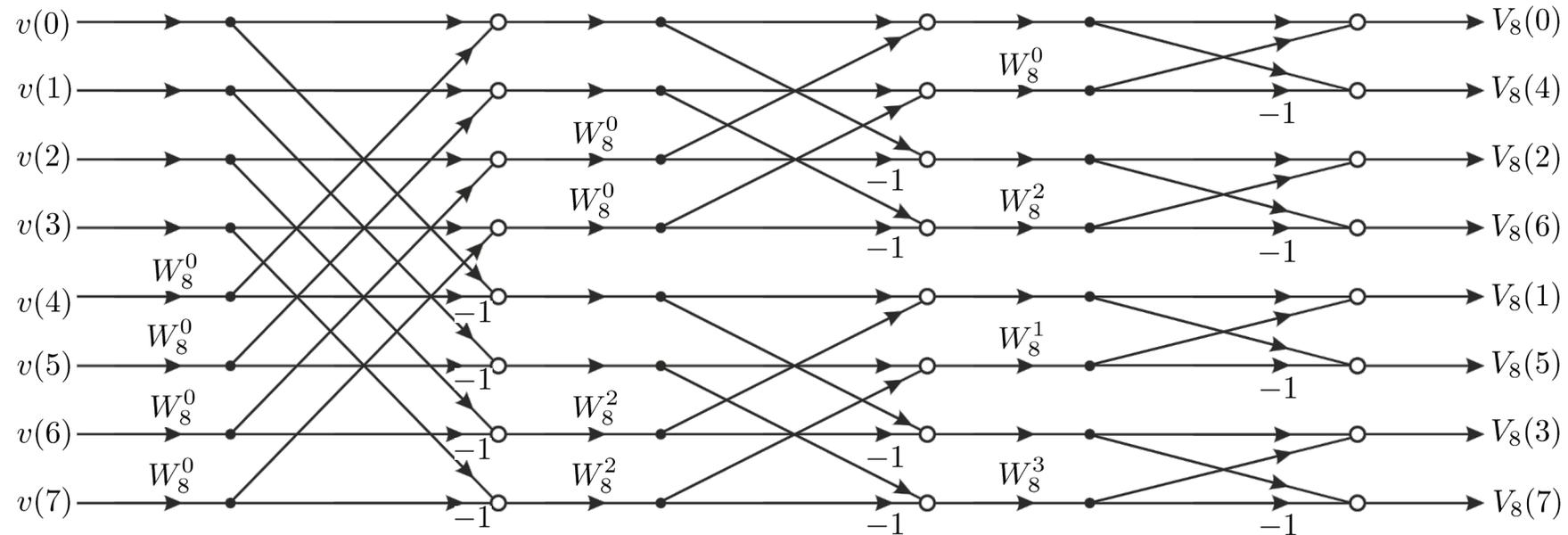
Graphische Veranschaulichung der Zerlegung für  $M = 8$  mit optimierter Butterfly-Struktur:



*Man beachte, dass in jeder Stufe nur sog. „in-place“-Operationen verwendet werden. D.h. man benötigt keinen neuen Speicher für jede Stufe!*

### Radix-2-Verfahren (Dezimation im Zeitbereich) – Teil 11

Graphische Veranschaulichung der Zerlegung für  $M = 8$  (Beibehaltung der „Ordnung“ des Ausgangsvektors):



## Verständnisfragen

### Partnerarbeit:

Versuchen Sie in Partnerarbeit folgende Aufgaben zu lösen:

- Wie viele *butterfly*-Operationen müssen Sie pro „Stufe“ für eine Radix-2-FFT der Ordnung 8 durchführen?

.....  
.....

- Wie viele Stufen müssen Sie für eine Radix-2-FFT der Ordnung  $M = 16$  umsetzen?

.....  
.....

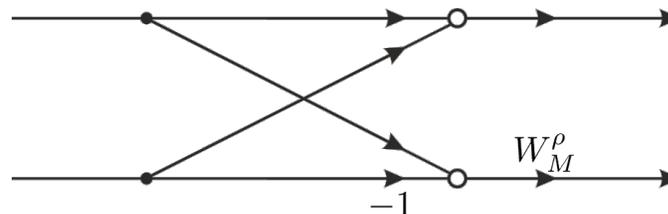
- Was versteht man unter sog. *in-place*-Operationen?

.....  
.....

### FFT-Alternativen – Teil 1

Neben der bisher beschriebenen Radix-2-Variante, die auf einer sog. Dezimation im Zeitbereich basiert, gibt es noch zahlreiche **weitere Ansätze** (die z.T. sogar größere Reduktionen des Rechenaufwands erlauben):

- Anstelle einer Sortierung der Eingangsdaten  $v(n)$  kann man auch die **Ausgangsdaten gruppieren**. Man spricht dann von einer **Zerlegung im Frequenzbereich** (im Englischen „**decimation in frequency**“). Die dabei entstehende *butterfly*-Struktur sieht dann folgendermaßen aus:



*Im Vergleich zur vorher vorgestellten butterfly-Operation wird nun die Multiplikation mit dem „twiddle“-Faktor am Ende vorgenommen.*

### FFT-Alternativen – Teil 2

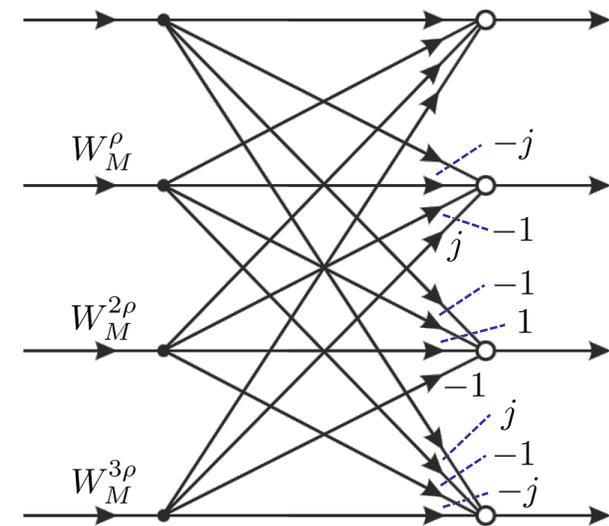
#### Weitere Ansätze (Fortsetzung):

- Verwendet man anstelle einer Basis-DFT der Ordnung 2 eine andere ganze Zahl, d.h. es gilt nun

$$M = r^m, \quad \text{mit } r \neq 2, \quad \text{und } r, m \in \mathbb{N},$$

so kann man völlig entsprechend DFT-Zerlegungen (im Zeit- oder Frequenzbereich) mit einem **Radix**  $r$  vornehmen. Hier sind vor allem Ansätze mit  $r = 3$  und  $r = 4$  interessant. Für **Radix-4-FFTs** sieht die *butterfly*-Struktur beispielsweise wie rechts dargestellt aus.

*Interessant an der rechts dargestellten Struktur ist vor allem, dass man damit die Anzahl der Speicherzugriffe weiter reduzieren kann.*



### FFT-Alternativen – Teil 3

#### Weitere Ansätze (Fortsetzung):

- Durch die **Einschränkung**  $M = r^m$  der DFT-Ordnung sind immer nur bestimmte Längen realisierbar.  
**Zwischenwerte** – etwa zwischen

$$M = 512, \quad \text{für } r = 2, m = 9 \text{ und}$$

$$M = 1024, \quad \text{für } r = 2, m = 10$$

kann man durch **Radix-Wechsel** oder durch „**mixed-Radix-FFTs**“ erreichen. Ein Beispiel ist

$$M = 576 = 2^6 3^2.$$

- Daneben gibt es noch zahlreiche weitere Ansätze für **alternative, effiziente Berechnungen** einer DFT, z.B.
  - die sog. „Winograd-FFT“ oder
  - die „Primfaktor-FFT“.

*Diese Ansätze werden wir hier nicht weiterverfolgen.  
 Interessierte sind an dieser Stelle auf die Literatur-  
 vorschläge (Anfang der Vorlesung) verwiesen.*

### Bit-Reversal – Teil 1

In der FFT-Signalflussgraphen der vorigen Folien kann man erkennen, dass die Eingangssignale (z.B. für den Fall  $r = 2, m = 3$ , d.h.  $M = 8$ ) in **vertauschter Reihenfolge** anliegen müssen. Der Grund hierfür lag in der (wiederholten) **Aufteilung in Teilfolgen**, die aus den **geraden bzw. den ungeraden Indizes** bestehen.

Die Beschreibung der Vertauschung geht sehr einfach, wenn man eine **Dualzahlendarstellung** für  $n$  verwendet. Ein Beispiel für  $M = 8$ :

$n_{\text{dez.}}$	$n_{\text{dual}}$	gerade	ungerade	$n'_{\text{dez.}}$	gerade	ungerade
0	000	00 0		0	0 0	
1	001		00 1	1		0 1
2	010	01 0		2	1 0	
3	011		01 1	3		1 1
4	100	10 0				
5	101		10 1			
6	110	11 0				
7	111		11 1			

*Unterschiede im LSB*

### Bit-Reversal – Teil 2

Aus dieser Zerlegung kann man ableiten, dass die getauschten Indizes den „bitweise gespiegelten“ Indizes (*bitreversal order*) entsprechen:

$n_{\text{dez.}}$	0	1	2	3	4	5	6	7
$n_{\text{dual}}$	000	001	010	011	100	101	110	111
$n_{\text{dual,rev.}}$	000	100	010	110	001	101	011	111
$n_{\text{dez.,rev.}}$	0	4	2	6	1	5	3	7

*Man vergleiche hierzu die FFT-Signalflussgraphen, die auf den Folien zuvor dargestellt sind.*

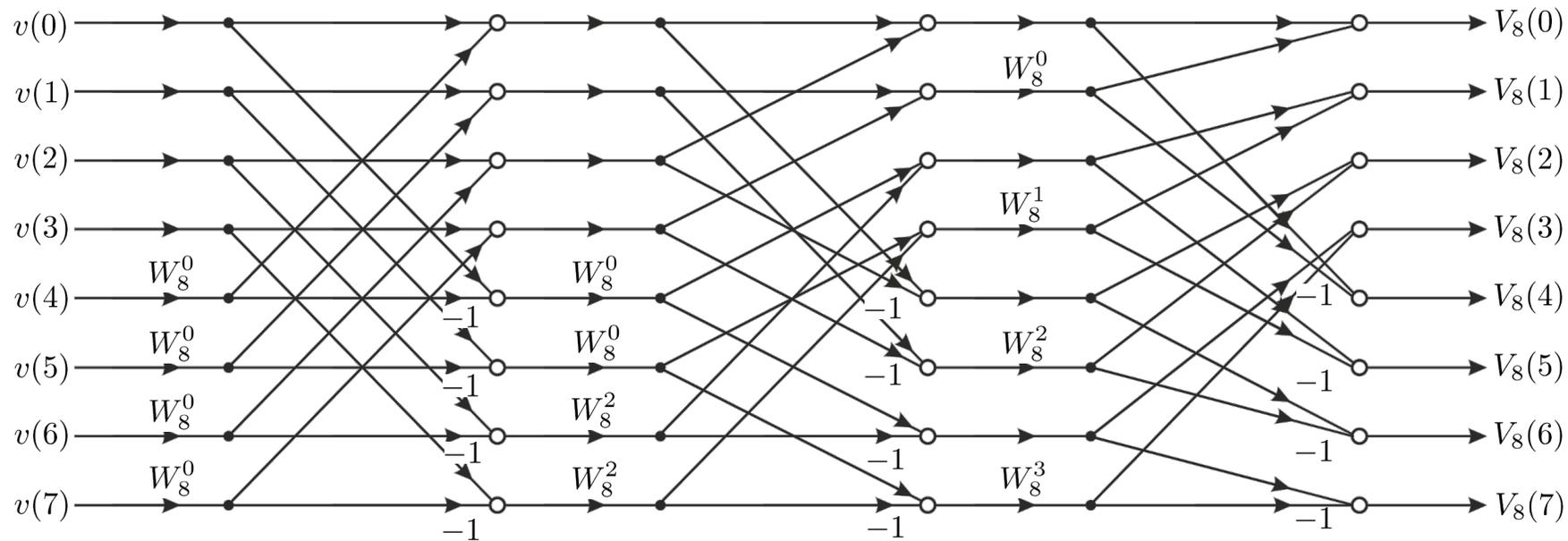
### Bemerkungen:

- Man kann die zuvor dargestellten *Signalflussgraphen* durch Transponieren und/oder Pfadverschiebungen *umformen*. So gelangt man zu *FFT-Implementierungen mit (weitgehend) beliebigen Datenreihenfolgen im Inneren, sowie vor allem an Ein- und Ausgängen*. So kann man z.B. eine Radix-2-FFT mit *bit-reversal* am Ausgang finden oder auch *Strukturen ganz ohne bit-reversal*.

### Bit-Reversal – Teil 3

**Bemerkungen** (Fortsetzung):

- Signalflussgraph ohne *bit-reversal*:



**Zu Vor- und Nachteilen dieser Struktur siehe nächste Folie!**

### Bit-Reversal – Teil 4

#### Bemerkungen (Fortsetzung):

- FFT-Signalflussgraphen, die ohne *bit-reversal* auskommen, haben aber auch einen **Nachteil**. Die Zwischenergebnisse der (internen) butterfly-Strukturen werden in der nächsten Stufe an anderer Stelle gebraucht und können daher nicht die Eingangsdaten in den selben Speicherstellen überschreiben. Man spricht daher von **non-in-place Signalflussgraphen**, während die vorher dargestellten Signalflussgraphen als **in-place-Algorithmen** bezeichnet werden.

Solche **in-place-butterfly-Strukturen benötigen nur einen Speichervektor** für  $M$  komplexe Werte, in dem zu Beginn die Werte von  $v(n)$  stehen, dann die Zwischenergebnisse und am Ende die Werte  $V_M(\mu)$ .

**Inverse FFT**

Gehen wir zunächst von der Definitionsgleichung der inversen DFT aus

$$\text{IDFT}\{V_M(\mu)\} = v(n) = \frac{1}{M} \sum_{\mu=0}^{M-1} V_M(\mu) e^{j\mu \frac{2\pi}{M} n}$$

und ersetzen hier  $n$  durch  $-n$ , so erhalten wir

$$\underbrace{v(-n)}_{v(M-n)} = \frac{1}{M} \sum_{\mu=0}^{M-1} \underbrace{V_M(\mu) e^{j\mu \frac{2\pi}{M} (-n)}}_{= \text{DFT}\{V_M(\mu)\}}$$

Man kann daher erkennen:

- **Die inverse DFT (IDFT) kann bis auf einen Vorfaktor  $M$  und eine Umindizierung mit den gleichen FFT-Algorithmen wie die DFT berechnet werden!**

## Transformation reeller Folgen – Teil 1

### **Basisüberlegung**

Bisher gingen wir für die Herleitung von effizienten DFT-Realisierungen von folgenden Voraussetzungen aus:

$$V_M(\mu) = \text{DFT}\{v(n)\} \in \mathbb{C} \text{ für } v(n) \in \mathbb{C}.$$

Für den Sonderfall von **reellen Eingangssignalen**, d.h.

$$v(n) \in \mathbb{R}, \implies \text{Im}\{v(n)\} = 0.$$

sind die bisherigen Realisierungen noch **verbesserungsfähig** (im Hinblick auf **Effizienz**). Wir werden uns daher im Folgenden mit dem Sonderfall  $v(n) \in \mathbb{R}$  befassen.

## Transformation reeller Folgen – Teil 2

**Gleichzeitige Transformation zweier reeller Signale – Teil 1**

Eine Möglichkeit, die Effizienz der Verarbeitung reeller Eingangsdaten zu steigern, besteht darin ***zwei reelle Signalfolgen gleichzeitig zu transformieren***. Gegeben seien dazu

$$v_1(n) \in \mathbb{R}, \quad n \in \{0, 1, 2, \dots, M-1\},$$

$$v_2(n) \in \mathbb{R}, \quad n \in \{0, 1, 2, \dots, M-1\}.$$

Gesucht sind nun

$$V_{1,M}(\mu) \bullet \text{---} \circ v_1(n),$$

$$V_{2,M}(\mu) \bullet \text{---} \circ v_2(n).$$

Wir definieren uns dazu zunächst das ***komplexe Eingangssignal***

$$v(n) = v_1(n) + j v_2(n).$$

Durch Anwendung der DFT/FFT auf dieses Signal erhalten wir folgende Spektralwerte

$$V_M(\mu) = \text{DFT}\{v(n)\}.$$

### Gleichzeitige Transformation zweier reeller Signale – Teil 2

Aufgrund der **Linearität der DFT** setzt sich die DFT von  $v(n)$  aus den Einzel-DFTs von  $v_1(n)$  und  $v_2(n)$  zusammen:

$$V_M(\mu) = \text{DFT}\{v_1(n)\} + j \text{DFT}\{v_2(n)\} = V_{1,M}(\mu) + j V_{2,M}(\mu).$$

Beide Einzelspektren sind jeweils komplexwertig. Es stellt sich nun die Frage, ob man die Gesamt-DFT wieder in die Einzelspektren zerlegen kann. Hierzu können wir wieder die **Symmetrieüberlegungen** heranziehen. Es gilt:

$$\begin{aligned}
 v(n) &= \overbrace{v_{\text{re,ge}}(n) + v_{\text{re,un}}(n)}^{= v_1(n)} + \overbrace{j v_{\text{im,ge}}(n) + j v_{\text{im,un}}(n)}{= j v_2(n)} \\
 V_M(\mu) &= \underbrace{V_{M \text{ re,ge}}(\mu)}_{= V_{1,M,\text{re}}(\mu)} + \underbrace{V_{M \text{ re,un}}(\mu)}_{= -V_{2,M,\text{im}}(\mu)} + \underbrace{j V_{M \text{ im,ge}}(\mu)}_{= j V_{2,M,\text{re}}(\mu)} + \underbrace{j V_{M \text{ im,un}}(\mu)}_{= j V_{1,M,\text{im}}(\mu)}.
 \end{aligned}$$

The diagram illustrates the decomposition of the signal  $v(n)$  into its real and imaginary components. The top row shows  $v(n)$  as the sum of  $v_{\text{re,ge}}(n) + v_{\text{re,un}}(n)$  (labeled as  $v_1(n)$ ) and  $j v_{\text{im,ge}}(n) + j v_{\text{im,un}}(n)$  (labeled as  $j v_2(n)$ ). The bottom row shows the corresponding DFT components  $V_M(\mu)$  as the sum of  $V_{M \text{ re,ge}}(\mu)$ ,  $V_{M \text{ re,un}}(\mu)$ ,  $j V_{M \text{ im,ge}}(\mu)$ , and  $j V_{M \text{ im,un}}(\mu)$ . Vertical lines connect the terms in the top row to the terms in the bottom row. Diagonal lines cross between the terms, showing the mapping:  $v_{\text{re,ge}}(n) \rightarrow V_{M \text{ re,ge}}(\mu)$ ,  $v_{\text{re,un}}(n) \rightarrow -V_{M \text{ re,un}}(\mu)$ ,  $j v_{\text{im,ge}}(n) \rightarrow j V_{M \text{ im,ge}}(\mu)$ , and  $j v_{\text{im,un}}(n) \rightarrow j V_{M \text{ im,un}}(\mu)$ .

### Gleichzeitige Transformation zweier reeller Signale – Teil 3

Setzt man die Teilspektren entsprechend zusammen so erhält man

$$\begin{aligned} V_{1,M}(\mu) &= V_{M \text{ re,ge}}(\mu) + j V_{M \text{ im,un}}(\mu) \\ &= \frac{1}{2} \left[ \text{Re}\{V_M(\mu)\} + \text{Re}\{V_M(M - \mu)\} \right] + \frac{j}{2} \left[ \text{Im}\{V_M(\mu)\} - \text{Im}\{V_M(M - \mu)\} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{2,M}(\mu) &= V_{M \text{ im,ge}}(\mu) - j V_{M \text{ re,un}}(\mu) \\ &= \frac{1}{2} \left[ \text{Im}\{V_M(\mu)\} + \text{Im}\{V_M(M - \mu)\} \right] - \frac{j}{2} \left[ \text{Re}\{V_M(\mu)\} - \text{Re}\{V_M(M - \mu)\} \right]. \end{aligned}$$

Zusammengefasst ergibt dies

$$\begin{aligned} V_{1,M}(\mu) &= \frac{1}{2} \left[ V_M(\mu) + V_M^*(M - \mu) \right], \\ V_{2,M}(\mu) &= -\frac{j}{2} \left[ V_M(\mu) - V_M^*(M - \mu) \right]. \end{aligned}$$

Damit kann man eine „schnelle Faltung“ zweier reeller Folgen mit Hilfe *einer* DFT bzw. IDFT (*anstelle von zweien* realisieren). Der **Rechenaufwand halbiert sich** damit.

## Transformation reeller Folgen – Teil 5

**Transformation einer „doppelt-langen“ reellen Folge – Teil 1**

Die vorigen Überlegungen haben gezeigt, wie man zwei reelle Folgen gleichzeitig transformieren kann.

Ähnliche Überlegungen kann man anstellen, damit man **eine reelle Folge mit einer DFT halber Länge** transformiert.

Hier definieren wir zunächst eine Eingangsfolge der Länge  $2M$ :

$$v(n), n \in \{0, 1, \dots, 2M - 1\}, v(n) \in \mathbb{R}.$$

Gesucht ist nun das DFT-Spektrum

$$\text{DFT}\{v(n)\} = V_{2M}(\mu) = \sum_{n=0}^{2M-1} v(n) e^{-j\frac{2\pi}{2M}n\mu} = \sum_{n=0}^{2M-1} v(n) W_{2M}^{n\mu}.$$

Um nun auf eine **DFT halber Länge** zu kommen, führen wir das komplexe Signal

$$\tilde{v}(n) = v(2n) + jv(2n + 1), \quad \text{mit } n \in \{0, 1, \dots, M\}$$

ein.

**Transformation einer „doppelt-langen“ reellen Folge – Teil 2**

Man kann das neue Signal nun wieder als **Zusammensetzung von zwei Signalanteilen** interpretieren:

$$\tilde{v}(n) = \underbrace{v(2n)}_{=v_1(n)} + j \underbrace{v(2n+1)}_{=v_2(n)}, \quad \text{mit } n \in \{0, 1, \dots, \frac{M}{2} - 1\}.$$

Aufgrund der **Linearität** der DFT besteht nun auch wieder das DFT-Spektrum des Signals  $\tilde{v}(n)$  aus zwei Komponenten:

$$\tilde{V}_M(\mu) = \text{DFT}\{v_1(n)\} + j \text{DFT}\{v_2(n)\} = V_{1,M}(\mu) + j V_{2,M}(\mu).$$

Diese **Einzelkomponenten** kann man gemäß den zuvor angestellten Überlegungen folgendermaßen **aus dem Spektrum  $\tilde{V}_M(\mu)$  extrahieren**:

$$V_{1,M}(\mu) = \frac{1}{2} \left[ \tilde{V}_M(\mu) + \tilde{V}_M^*(M - \mu) \right],$$

$$V_{2,M}(\mu) = -\frac{j}{2} \left[ \tilde{V}_M(\mu) - \tilde{V}_M^*(M - \mu) \right].$$

### Transformation einer „doppelt-langen“ reellen Folge – Teil 3

Andererseits gilt aber auch folgende Überlegung:

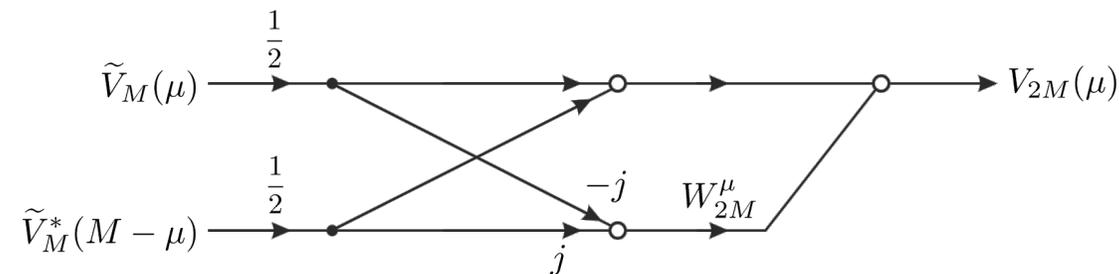
$$\begin{aligned}
 V_{2M}(\mu) &= \sum_{n=0}^{2M-1} v(n) e^{-j \frac{2\pi}{2M} n\mu} \\
 &\quad \dots \text{Aufspalten der Summe in zwei Teilsummen} \dots \\
 &= \sum_{n=0}^{M-1} \underbrace{v(2n)}_{=v_1(n)} e^{-j \frac{2\pi}{2M} 2n\mu} + \sum_{n=0}^{M-1} \underbrace{v(2n+1)}_{=v_2(n)} e^{-j \frac{2\pi}{2M} (2n+1)\mu} \\
 &\quad \dots \text{Vereinfachen der Teilsummen} \dots \\
 &= \sum_{n=0}^{M-1} v_1(n) e^{-j \frac{2\pi}{M} n\mu} + e^{-j \frac{2\pi}{2M} \mu} \sum_{n=0}^{M-1} v_2(n) e^{-j \frac{2\pi}{M} n\mu} \\
 &\quad \dots \text{Einsetzen der DFT-Definition} \dots \\
 &= V_{1,M}(\mu) + e^{-j \frac{2\pi}{2M} \mu} V_{2,M}(\mu).
 \end{aligned}$$

### Transformation einer „doppelt-langen“ reellen Folge – Teil 4

Fasst man die **Überlegungen der letzten Folien** zusammen, so kann das Spektrum einer reellen Folge der Länge  $2M$  mittels einer DFT des komplexen Signals  $\tilde{v}(n) = v(2n) + jv(2n + 1)$  der Länge  $M$  wie folgt bestimmt werden:

$$\begin{aligned}
 V_{2M}(\mu) &= V_{1,M}(\mu) + e^{-j\frac{2\pi}{2M}\mu} V_{2,M}(\mu) \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \tilde{V}_M(\mu) + \tilde{V}_M^*(M - \mu) \right] + e^{-j\frac{2\pi}{2M}\mu} \left( -\frac{j}{2} \left[ \tilde{V}_M(\mu) - \tilde{V}_M^*(M - \mu) \right] \right).
 \end{aligned}$$

Als **Signalflussgraph** kann man dies folgendermaßen darstellen:



**Rücktransformation eines Spektrums, welches zu einem reellen Signal gehört – Teil 1**

Wenn man die einzelnen Schritte des Verfahrens zur effizienten Transformation von reellen Signalen wieder umkehrt, so kann man auch die direkte IFFT durch Modifikationen und eine IFFT halber Ordnung beschreiben. Bei der Transformation wurden dabei drei folgende Schritte durchgeführt:

□ **Umwandlung der reellen Folge in eine komplexe:**

$$\tilde{v}(n) = v(2n) + j v(2n + 1), \quad \text{mit } n \in \{0, 1, \dots, M - 1\}.$$

□ **FFT der halben Ordnung:**

$$\tilde{V}_M(\mu) = \text{DFT}\{\tilde{v}(n)\} = \sum_{n=0}^{M-1} \tilde{v}(n) e^{-j\frac{2\pi}{M}n\mu}.$$

□ **Umrechnung des FFT-Ausgangs ins Zielspektrum:**

$$V_{2M}(\mu) = \frac{1}{2} \left[ \tilde{V}_M(\mu) + \tilde{V}_M^*(M - \mu) \right] + e^{-j\frac{2\pi}{2M}\mu} \left( -\frac{j}{2} \left[ \tilde{V}_M(\mu) - \tilde{V}_M^*(M - \mu) \right] \right).$$

Diese drei Schritte können nun jeweils invertiert werden. Auf diese Weise ist eine effiziente Berechnung der inversen FFT für reelle Zielsignale möglich.

### Rücktransformation eines Spektrums, welches zu einem reellen Signal gehört – Teil 2

Für die Invertierung muss zusätzlich auch die Reihenfolge der Schritte umgedreht werden. Wir starten daher mit der Umwandlung des letzten Schritts:

□ **Umrechnung des DFT-Spektrum eines reellen Signals:**

$$V_{2M}(\mu) = \frac{1}{2} [\tilde{V}_M(\mu) + \tilde{V}_M^*(M - \mu)] + e^{-j\frac{2\pi}{2M}\mu} \left( -\frac{j}{2} [\tilde{V}_M(\mu) - \tilde{V}_M^*(M - \mu)] \right)$$

... multiplizieren beider Seiten mit  $2j$  ...

$$2j V_{2M}(\mu) = j \tilde{V}_M(\mu) + j \tilde{V}_M^*(M - \mu) + e^{-j\frac{2\pi}{2M}\mu} \tilde{V}_M(\mu) - e^{-j\frac{2\pi}{2M}\mu} \tilde{V}_M^*(M - \mu)$$

... Produkte neu zusammenfassen ...

$$2j V_{2M}(\mu) = \tilde{V}_M(\mu) \left( j + e^{-j\frac{2\pi}{2M}\mu} \right) + \tilde{V}_M^*(M - \mu) \left( j - e^{-j\frac{2\pi}{2M}\mu} \right).$$

Analog dazu kann man **für den Frequenzindex  $M - \mu$  Folgendes** finden:

$$2j V_{2M}(M - \mu) = \tilde{V}_M(M - \mu) \left( j + e^{-j\frac{2\pi}{2M}(M-\mu)} \right) + \tilde{V}_M^*(\mu) \left( j - e^{-j\frac{2\pi}{2M}(M-\mu)} \right).$$

... Fortsetzung nächste Seite ...

### Rücktransformation eines Spektrums, welches zu einem reellen Signal gehört – Teil 3

□ **Umrechnung des DFT-Spektrum eines reellen Signals** (Fortsetzung):

Dies kann wie folgt umgeformt werden:

$$2j V_{2M}(M - \mu) = \tilde{V}_M(M - \mu) \left( j + e^{-j \frac{2\pi}{2M}(M-\mu)} \right) + \tilde{V}_M^*(\mu) \left( j - e^{-j \frac{2\pi}{2M}(M-\mu)} \right)$$

... verwenden, dass  $e^{-j \frac{2\pi}{2M}(M-\mu)} = \underbrace{e^{-j \frac{2\pi}{2M}M}}_{=-1} e^{j \frac{2\pi}{2M}\mu} = -e^{j \frac{2\pi}{2M}\mu}$  gilt ...

$$2j V_{2M}(M - \mu) = \tilde{V}_M(M - \mu) \left( j - e^{j \frac{2\pi}{2M}\mu} \right) + \tilde{V}_M^*(\mu) \left( j + e^{j \frac{2\pi}{2M}\mu} \right)$$

... konjugiert komplex ...

$$-2j V_{2M}^*(M - \mu) = \tilde{V}_M^*(M - \mu) \left( -j - e^{-j \frac{2\pi}{2M}\mu} \right) + \tilde{V}_M(\mu) \left( -j + e^{-j \frac{2\pi}{2M}\mu} \right)$$

... Summationsreihenfolge vertauschen ...

$$-2j V_{2M}^*(M - \mu) = \tilde{V}_M(\mu) \left( -j + e^{-j \frac{2\pi}{2M}\mu} \right) + \tilde{V}_M^*(M - \mu) \left( -j - e^{-j \frac{2\pi}{2M}\mu} \right).$$

... Fortsetzung nächste Seite ...

### Rücktransformation eines Spektrums, welches zu einem reellen Signal gehört – Teil 4

□ **Umrechnung des DFT-Spektrum eines reellen Signals** (Fortsetzung):

Zusammengefasst haben wir nun folgende zwei Gleichungen gefunden:

$$2j V_{2M}(\mu) = \tilde{V}_M(\mu) \left( j + e^{-j \frac{2\pi}{2M} \mu} \right) + \tilde{V}_M^*(M - \mu) \left( j - e^{-j \frac{2\pi}{2M} \mu} \right), \quad (1)$$

$$-2j V_{2M}^*(M - \mu) = \tilde{V}_M(\mu) \left( -j + e^{-j \frac{2\pi}{2M} \mu} \right) + \tilde{V}_M^*(M - \mu) \left( -j - e^{-j \frac{2\pi}{2M} \mu} \right). \quad (2)$$

Bestimmt man nun

$$\text{Gl. (1)} \left( -j - e^{-j \frac{2\pi}{2M} \mu} \right) - \text{Gl. (2)} \left( j - e^{-j \frac{2\pi}{2M} \mu} \right),$$

so erhält man:

$$\begin{aligned} & 2j V_{2M}(\mu) \left( -j - e^{-j \frac{2\pi}{2M} \mu} \right) + 2j V_{2M}^*(M - \mu) \left( j - e^{-j \frac{2\pi}{2M} \mu} \right) \\ &= \tilde{V}_M(\mu) \left[ \left( j + e^{-j \frac{2\pi}{2M} \mu} \right) \left( -j - e^{-j \frac{2\pi}{2M} \mu} \right) - \left( -j + e^{-j \frac{2\pi}{2M} \mu} \right) \left( j - e^{-j \frac{2\pi}{2M} \mu} \right) \right] \end{aligned}$$

### Rücktransformation eines Spektrums, welches zu einem reellen Signal gehört – Teil 5

□ **Umrechnung des DFT-Spektrum eines reellen Signals** (Fortsetzung):

Vereinfachen der letzten Gleichung:

$$\begin{aligned}
 & 2j V_{2M}(\mu) \left( -j - e^{-j \frac{2\pi}{2M} \mu} \right) + 2j V_{2M}^*(M - \mu) \left( j - e^{-j \frac{2\pi}{2M} \mu} \right) \\
 &= \tilde{V}_M(\mu) \left[ \left( j + e^{-j \frac{2\pi}{2M} \mu} \right) \left( -j - e^{-j \frac{2\pi}{2M} \mu} \right) - \left( -j + e^{-j \frac{2\pi}{2M} \mu} \right) \left( j - e^{-j \frac{2\pi}{2M} \mu} \right) \right] \\
 & \quad \dots \text{vereinfachen des Terms in den eckigen Klammern} \dots \\
 & 2j V_{2M}(\mu) \left( -j - e^{-j \frac{2\pi}{2M} \mu} \right) + 2j V_{2M}^*(M - \mu) \left( j - e^{-j \frac{2\pi}{2M} \mu} \right) = \tilde{V}_M(\mu) \left[ -4j e^{-j \frac{2\pi}{2M} \mu} \right] \\
 & \quad \dots \text{multiplizieren mit } -\frac{1}{4j} \dots \\
 & \frac{1}{2} V_{2M}(\mu) \left( j + e^{-j \frac{2\pi}{2M} \mu} \right) + \frac{1}{2} V_{2M}^*(M - \mu) \left( -j + e^{-j \frac{2\pi}{2M} \mu} \right) = \tilde{V}_M(\mu) e^{-j \frac{2\pi}{2M} \mu} \\
 & \quad \dots \text{multiplizieren mit } e^{j \frac{2\pi}{2M} \mu} \dots \\
 & \frac{1}{2} V_{2M}(\mu) \left( j e^{j \frac{2\pi}{2M} \mu} + 1 \right) + \frac{1}{2} V_{2M}^*(M - \mu) \left( -j e^{j \frac{2\pi}{2M} \mu} + 1 \right) = \tilde{V}_M(\mu)
 \end{aligned}$$

### Rücktransformation eines Spektrums, welches zu einem reellen Signal gehört – Teil 6

- **Umrechnung des DFT-Spektrum eines reellen Signals** (Fortsetzung):

Damit ergibt sich final:

$$\tilde{V}_M(\mu) = \frac{1}{2} \left[ V_{2M}(\mu) \left( 1 + j e^{j \frac{2\pi}{2M} \mu} \right) + V_{2M}^*(M - \mu) \left( 1 - j e^{j \frac{2\pi}{2M} \mu} \right) \right].$$

- **Invertierung der DFT:**

Die DFT kann einfach durch eine IDFT invertiert werden:

$$\tilde{v}(n) = \text{IDFT}\{\tilde{V}_M(\mu)\} = \frac{1}{M} \sum_{\mu=0}^{M-1} \tilde{V}_M(\mu) e^{j \frac{2\pi}{M} n \mu}.$$

**Man beachte, dass hier nicht  $V_{2M}^*(2M - \mu)$  steht – dies wäre dann gleich  $V_{2M}(\mu)$ !**

- **Invertierung der Zeitbereichssignalaufspaltung:**

Auch dieser Zusammenhang kann einfach invertiert werden:

$$v(n) = \begin{cases} \text{Re}\{\tilde{v}(\frac{n}{2})\}, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \text{Im}\{\tilde{v}(\frac{n-1}{2})\}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

## Verständnisfragen

### Partnerarbeit:

Versuchen Sie in Partnerarbeit folgende Aufgaben zu lösen:

- Welche zusätzlichen Maßnahmen bzw. Schritte sind notwendig, damit Sie eine IDFT mit Hilfe einer FFT bestimmen können?

.....  
.....

- Wie groß müssen Sie die Sinus/Cosinus-Tabellen für eine 64-er FFT wählen?

.....  
.....

- Wie viele Additionen und Multiplikationen benötigen Sie in etwa, wenn Sie eine 1024-er DFT eines reellen Signals effizient umsetzen wollen?

.....  
.....

## Grundlagen

FFT-Algorithmen liefern (im Allgemeinen) die DFT-Werte  $V_M(\mu)$  in allen  $M$  Punkten, d.h. für

$$\mu \in \{0, 1, \dots, M-1\} \implies \Omega_\mu = \mu \frac{2\pi}{M} \implies f_\mu = \mu \frac{f_A}{M}.$$

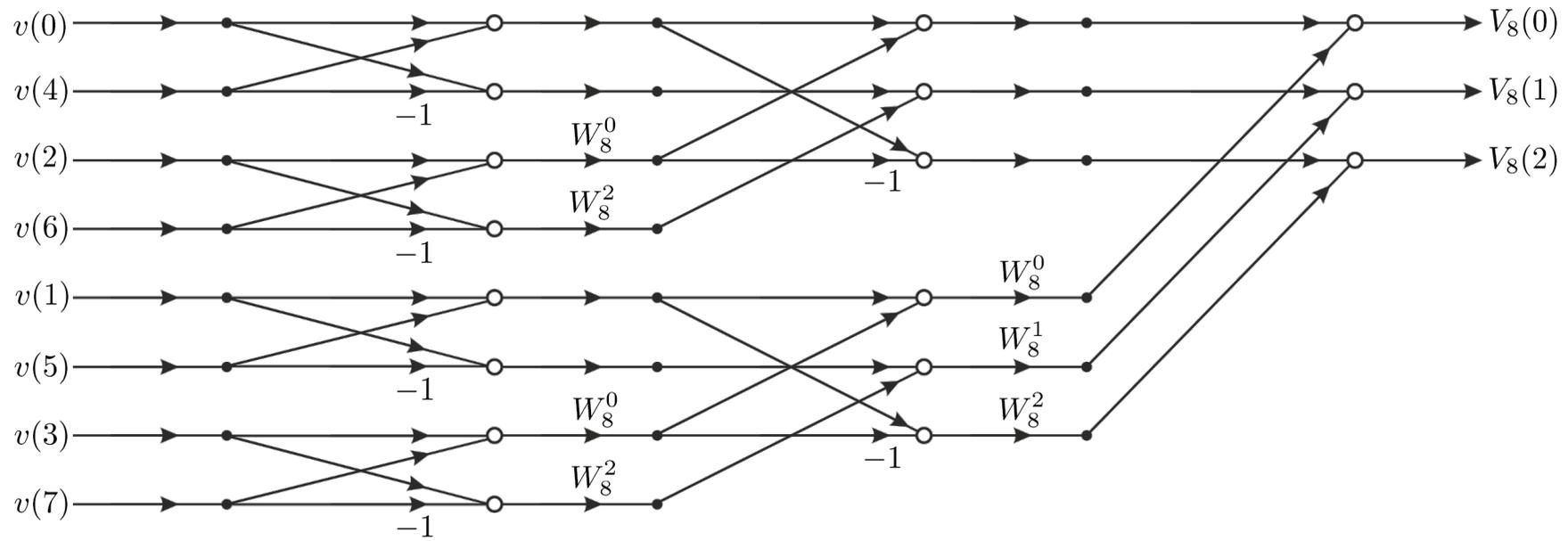
FFT-*pruning* bedeutet nun, dass man nur einen Teil der Berechnungen der DFT durchführt. Das Verb „to prune“ bedeutet so viel wie „pflücken“, d.h. **Herausnehmen bzw. Entfernen von nicht interessierenden Zweigen des Signalflussgraphen.**

Dies ist für folgende Fälle interessant

- ❑ wenn nicht alle Eingangsdaten von Null verschieden sind oder
- ❑ wenn nicht alle Ausgangsdaten von Interesse sind.

### Nur wenige Frequenzstützstellen sind von Interesse

Beispiel für das Entfernen von Butterfly-Strukturen für den Fall  $M = 8 = 2^3$ , falls man nur Interesse an  $V_8(0)$ ,  $V_8(1)$  und  $V_8(2)$  hat:

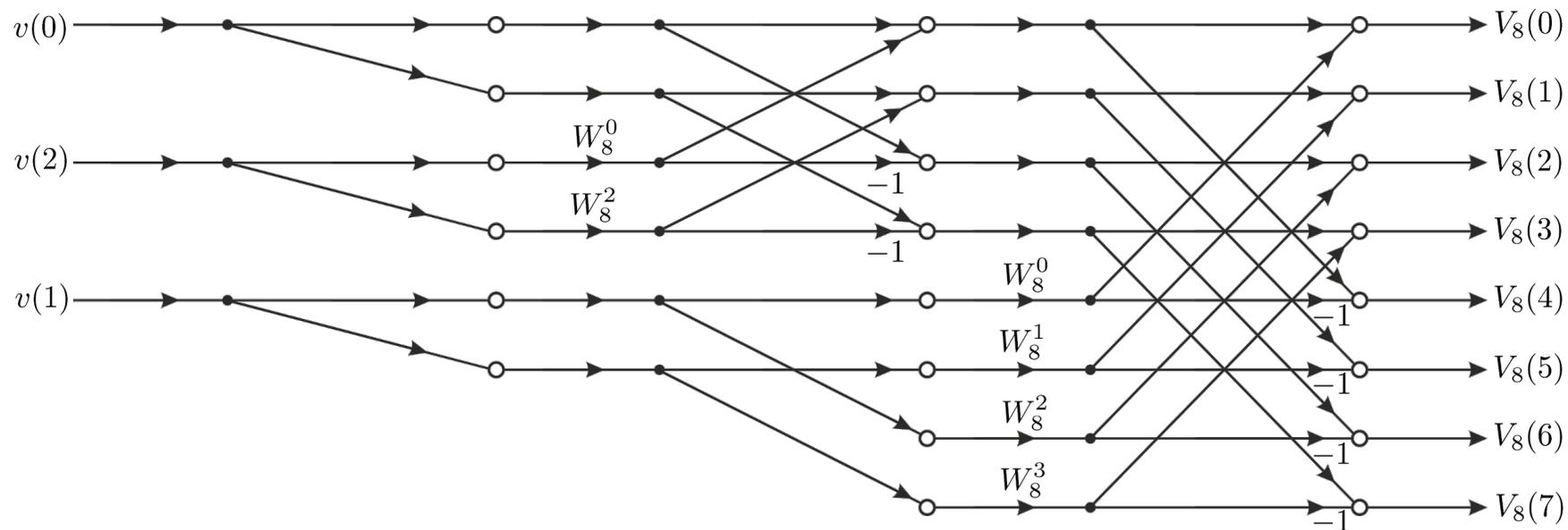


Einsparungen: 0 + 2 x ½ butterflies + (3 x ½ + 1) butterflies = 3.5 butterflies

Insgesamt konnten damit 3.5 von 12 butterfly-Strukturen eingespart werden (ca. 30%)!

### Das Eingangssignal hat nur wenige von Null verschiedene Werte:

Beispiel für das Entfernen von Butterfly-Strukturen für den Fall  $M = 8 = 2^3$ , falls nur  $v(0)$ ,  $v(1)$  und  $v(2)$  von Null verschieden sind:



**Einsparungen:  $(3 \times \frac{1}{2} + 1)$  butterflies +  $2 \times \frac{1}{2}$  butterflies + 0 = 3.5 butterflies**

**Insgesamt konnten damit wieder 3.5 von 12 butterfly-Strukturen eingespart werden (ca. 30%)!**

## FFT-*pruning* – Teil 4

### **Bemerkungen:**

- ❑ Sollten sowohl einige Eingangswerte Null sein und man ist auch nur an einigen Ausgangswerten interessiert, so kann man ein **kombiniertes Eingangs- und Ausgangs-*pruning*** vornehmen (für beliebige  $n - \mu$ -Kombinationen).
- ❑ Man reduziert durch *pruning* die Anzahl der benötigten Additionen und Multiplikationen, aber man erhöht den Aufwand auch wieder durch eine **erhöhte Irregularität** des FFT-Algorithmus (z.B. beim Setzen der Lese- bzw. Schreibadressen).
- ❑ In **Extremfällen** (z.B. wenn man nur einen Spektralwert bestimmen will) kann es aber auch besser sein, die **direkte Berechnung** – d.h. die DFT – zu verwenden. In solchen Fällen sollten spezielle Umsetzungen (z.B. Görtzel-Algorithmus) verwendet werden.

### Grundlagen

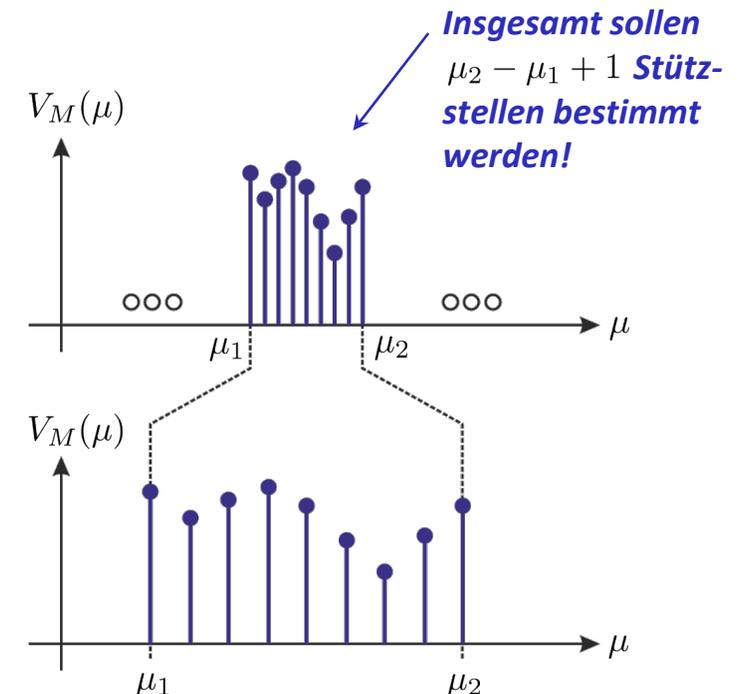
Der Begriff der „Zoom-FFT“ ist in der Literatur etwas „unscharf“ definiert. Man meint hiermit im Allgemeinen, dass ein **Ausschnitt des Spektrums genauer betrachtet werden soll** (in Anlehnung an die Optik einer Kamera). Im Folgenden werden wir dabei zwischen zwei Fällen unterscheiden.

### Nur ein bestimmter Frequenzbereich ist von Interesse

Hierbei sei das gesamte Signal  $v(n)$  mit  $n \in \{0, 1, \dots, M - 1\}$  gegeben. Im Frequenzbereich interessiert dann der Bereich

$$\mu \in \{\mu_1, \mu_1 + 1, \dots, \mu_2\}.$$

Man kann sich dies als **gedehnte Darstellung unveränderter Daten** vorstellen. **Realisiert** werden kann dies in aufwandgünstiger Weise **durch** das zuvor eingeführte **FFT-pruning**.



### Ein bestimmter Frequenzbereich soll feiner aufgelöst werden – Teil 1

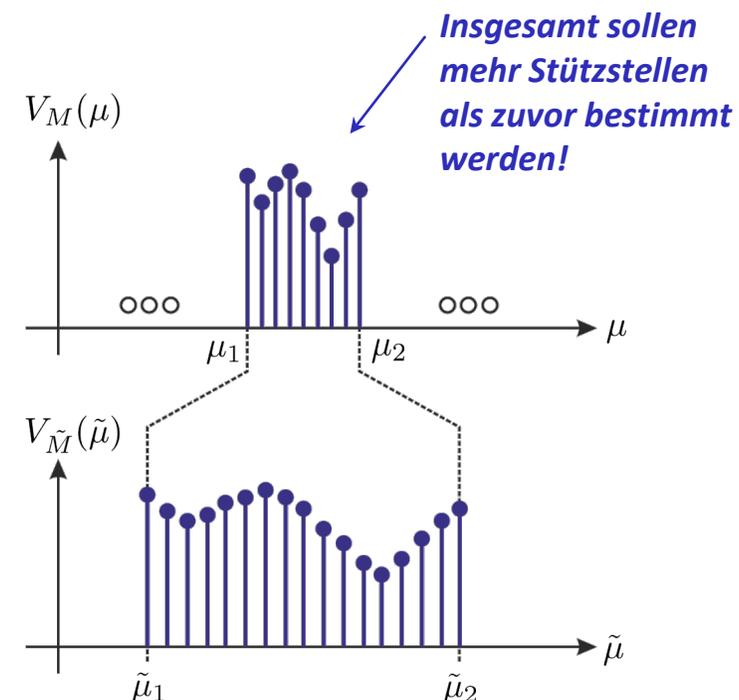
Eine andere Auslegung des Begriffs „Zoom-FFT“ meint, dass in einem bestimmten Frequenzband **mehr als die ursprünglichen Stützstellen** bestimmt werden sollen. Das heißt es ist auch wieder der Frequenzbereich

$$\Omega \in \left[ \mu_1 \frac{2\pi}{M}, \mu_1 + 1, \dots, \mu_2 \frac{2\pi}{M} \right].$$

von Interesse, es sollen nun aber mehr als  $\mu_2 - \mu_1 + 1$  Stützstellen bestimmt werden.

Dabei entsteht nicht nur eine gedehnte Darstellung, sondern es sollen auch weitere Frequenzstützstellen bestimmt werden. Dies kann durch eine **Interpolation** der Werte  $V_M(\mu)$  bestimmt werden.

Es stellen sich dabei die Fragen **wie fein ein solches Spektrum sein kann** und wie man die **Interpolation am besten bestimmt**.



### Ein bestimmter Frequenzbereich soll feiner aufgelöst werden – Teil 2

Als Antwort auf die zuvor gestellten Fragen kann man zunächst festhalten, dass ein **beliebig feines Raster möglich** ist, denn:

**Die DFT** (und damit auch die FFT) **liefert Abtastwerte der kontinuierlichen Fourier-Transformation eines endlich langen Signals:**

$$v(n), n \in \{0, 1, \dots, M-1\} \quad \circ \text{---} \bullet \quad V(e^{j\Omega}) = \sum_{n=0}^{M-1} v(n) e^{-j\Omega n}$$

$$V_M(\mu) = \sum_{n=0}^{M-1} v(n) e^{-j\mu \frac{2\pi}{M} n} = V(e^{j\Omega}) \Big|_{\Omega = \mu \frac{2\pi}{M}}$$

Die Stützstellen können in  $\Omega \in [-\pi, \pi]$  (oder auf einem  $2\pi$ -begrenzten Band) in beliebig vielen Frequenzpunkten  $\Omega_\mu$  bestimmt werden.

Eine Möglichkeit hierfür liegt darin, wiederum **äquidistante Stützstellen** zu wählen  $\Omega_\mu = \mu \frac{2\pi}{\tilde{M}}$ , aber mit  $\tilde{M} \geq M$  (d.h. ein feineres Raster).

### Ein bestimmter Frequenzbereich soll feiner aufgelöst werden – Teil 3

Damit ergibt sich für die Berechnung der Fourier-Transformation

$$V(e^{j\Omega\mu}) = \sum_{n=0}^{M-1} v(n) e^{-j\mu \frac{2\pi}{M} n}.$$

Führt man nun das Signal

$$\tilde{v}(n), = \begin{cases} v(n), & \text{falls } n \in \{0, 1, \dots, M-1\}, \\ 0, & \text{falls } n \in \{M, M+1, \dots, \tilde{M}-1\} \end{cases}$$

ein, so kann die Fourier-Transformation mittels einer DFT bzw. FFT (und **zero padding**) durchgeführt werden:

$$V(e^{j\Omega\mu}) = \sum_{n=0}^{\tilde{M}-1} \tilde{v}(n) e^{-j\mu \frac{2\pi}{\tilde{M}} n} = V_{\tilde{M}}(\mu) = \text{DFT}\{\tilde{v}(n)\}.$$

Es entstehen wiederum **Abtastwerte des „richtigen“ (kontinuierlichen) Spektrums**.

Diese Art der Interpolation (**zero padding** und DFT/FFT) stellt die **bestmögliche Interpolation** dar (ohne Herleitung).

Da hier unter Umständen nur wenige Eingangssignale von Null verschieden sind, kann dies auch wieder mit **FFT-pruning** verbunden werden.

## Spektralanalyse unendlich langer Signale mit der DFT/FFT – Teil 1

**Determinierte Folgen – Teil 1**

Es sei nun ein Signal gegeben für welches gilt

$$v(n), n \in \mathbb{Z},$$

d.h. das Signal ist **unendlich lang**. Für die Fourier- oder z-Transformation ist dies akzeptabel, für die Anwendung einer DFT/FFT allerdings nicht. Hier sind nur **endliche Summationsgrenzen** zulässig.

Man kann in diesen Fällen eine **DFT eines Signalausschnitts** bilden. Diesen Signalausschnitt definieren wir wie folgt:

$$\bar{v}(n, \kappa) = \begin{cases} v(n - \kappa), & \text{falls } \kappa \in \{0, 1, \dots, M - 1\}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Entsprechend gilt für die DFT

$$\bar{V}_M(n, \mu) = \sum_{\kappa=0}^{M-1} \bar{v}(n, \kappa) e^{-j\mu \frac{2\pi}{M} \kappa}.$$

Sie ist nun abhängig von  $n$  und stellt somit ein **lokal gültiges Ausschnittsspektrum** dar.

Man nennt dies auch **Kurzzeitspektrum**.

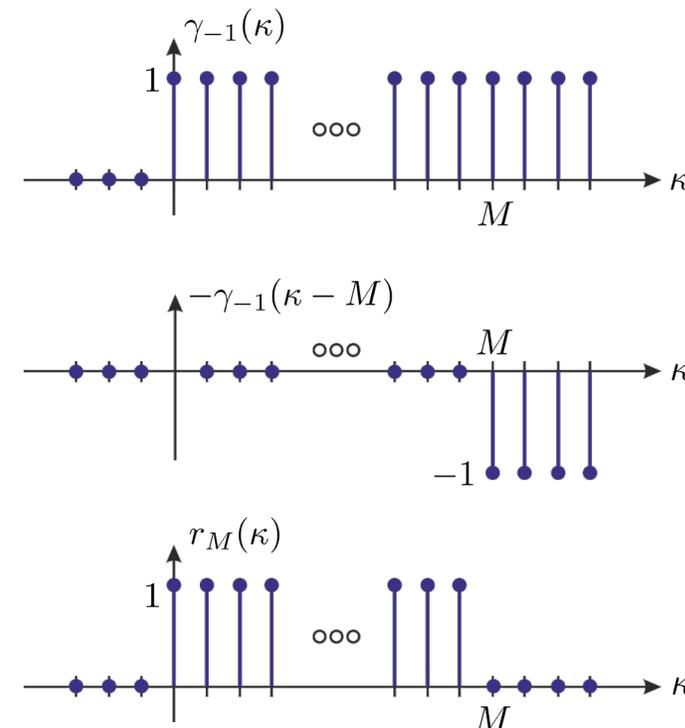
### Determinierte Folgen – Teil 2

Wir betrachten noch einmal das Kurzzeitspektrum und wollen nun einen Bezug zur Fourier-Transformation herstellen. Hierzu gehen wir zunächst von der Definitionsgleichung der letzten Folie aus:

$$\begin{aligned} \bar{V}_M(n, \mu) &= \sum_{\kappa=0}^{M-1} \bar{v}(n, \kappa) e^{-j\mu \frac{2\pi}{M} \kappa} \\ &= \sum_{\kappa=0}^{M-1} v(n - \kappa) e^{-j\mu \frac{2\pi}{M} \kappa}. \end{aligned}$$

Wir können die „**Fensterung**“ des ursprünglichen Signals durch **zwei Sprungfunktionen** (ein sog. Rechteckfenster) beschreiben:

$$r_M(\kappa) = \gamma_{-1}(\kappa) - \gamma_{-1}(\kappa - M).$$



### Determinierte Folgen – Teil 3

Setzen wir dieses Ergebnis bzw. diese Definition ein, so erhalten wir

$$\bar{V}_M(n, \mu) = \sum_{\kappa=0}^{M-1} v(n - \kappa) e^{-j\mu \frac{2\pi}{M} \kappa}$$

... Einsetzen der Definition des Rechteckfensters und Anpassung der Summationsgrenzen ...

$$= \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} v(n - \kappa) r_M(\kappa) e^{-j\mu \frac{2\pi}{M} \kappa}$$

... Substitution von  $n - \kappa = \nu$  ...

$$= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} v(\nu) r_M(n - \nu) e^{-j\mu \frac{2\pi}{M} (n - \nu)}$$

... Ausklammern des Exponentialterms ...

$$= e^{-j\mu \frac{2\pi}{M} n} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} v(\nu) r_M(n - \nu) e^{-j\mu \frac{2\pi}{M} (-\nu)}$$

### Determinierte Folgen – Teil 4

Nehmen wir an, dass das Eingangssignal *reellwertig* ist, so ergibt sich

$$\bar{V}_M(n, \mu) = e^{-j\mu \frac{2\pi}{M} n} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} v(\nu) r_M(n - \nu) e^{-j\mu \frac{2\pi}{M} (-\nu)}$$

... *Reellwertigkeit ausnutzen und Exponentialterm in Vorzeichen umkehren* ...

$$= e^{-j\mu \frac{2\pi}{M} n} \left[ \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} [v(\nu) r_M(n - \nu)] e^{-j\mu \frac{2\pi}{M} \nu} \right]^*$$

... *Definition der Fourier-Transformation einsetzen* ...

$$= e^{-j\mu \frac{2\pi}{M} n} \left[ \mathcal{F} \left\{ v(\kappa) r_M(n - \kappa) \right\} \right]^* .$$

*Das Ergebnis der DFT entspricht somit an Stützstellen der Fourier-Transformation eines gefenstereten Signalausschnitts!*

## Verständnisfragen

### Partnerarbeit:

Versuchen Sie in Partnerarbeit folgende Aufgaben zu lösen:

- Wenn Sie lediglich einen einzigen Spektralwert bestimmen wollen, ist dann eine *pruning*-FFT oder eine DFT die bessere Wahl? Begründen Sie Ihre Antwort!

.....  
.....

- Welche anderen Möglichkeiten für die Interpolation von Werten kennen Sie?  
Was sind die Vor- bzw. Nachteile dieser Interpolationen gegenüber einer FFT mit zero padding?

.....  
.....

- Welche zusätzlichen algorithmischen Schritte sind notwendig, wenn Sie in einer FFT *pruning* einführen?

.....  
.....

### Fenstereffekte – Teil 1

Wie wir aus den Grundlagen-Vorlesungen schon wissen, bewirkt eine **Multiplikation von zwei Folgen im Zeitbereich eine zyklische Faltung im Fourier-Bereich**:

$$v(n) r_M(n) \circ \bullet \frac{1}{2\pi j} V(e^{j\Omega}) \circledast R_M(e^{j\omega}).$$

Um die Multiplikation mit der Rechteckfolge besser interpretieren zu können, bestimmen wir zunächst deren **Fourier-Transformierte**

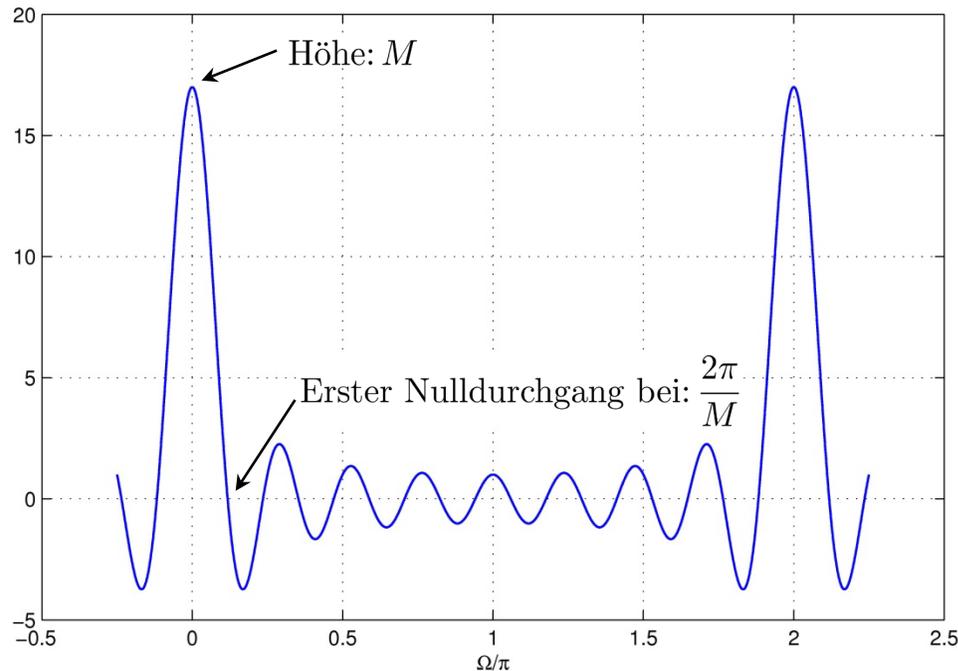
$$\begin{aligned} R_M(e^{j\Omega}) &= \mathcal{F}\{r_M(n)\} = \sum_{n=0}^{M-1} 1 e^{-j\Omega n} = \frac{1 - e^{-j\Omega M}}{1 - e^{-j\Omega}} \\ &= \frac{e^{-j\Omega \frac{M}{2}} e^{j\Omega \frac{M}{2}} - e^{-j\Omega \frac{M}{2}}}{e^{-j\Omega \frac{1}{2}} e^{j\Omega \frac{1}{2}} - e^{-j\Omega \frac{1}{2}}} = e^{-j\Omega \frac{M-1}{2}} \frac{\sin(\frac{M\Omega}{2})}{\sin(\frac{\Omega}{2})}. \end{aligned}$$

Verschiebt man das Rechteck (zeitlich) so, dass es mittig im (zeitlichen) Nullwert liegt, so ergibt sich für das **Spektrum des (nichtkausalen) Rechteckfensters**:

$$\tilde{R}_M(e^{j\Omega}) = \frac{\sin(\frac{M\Omega}{2})}{\sin(\frac{\Omega}{2})}.$$

### Fenstereffekte – Teil 2

**Darstellung** des Spektrums des (nichtkausalen) Rechteckfensters für  $M = 17$ :

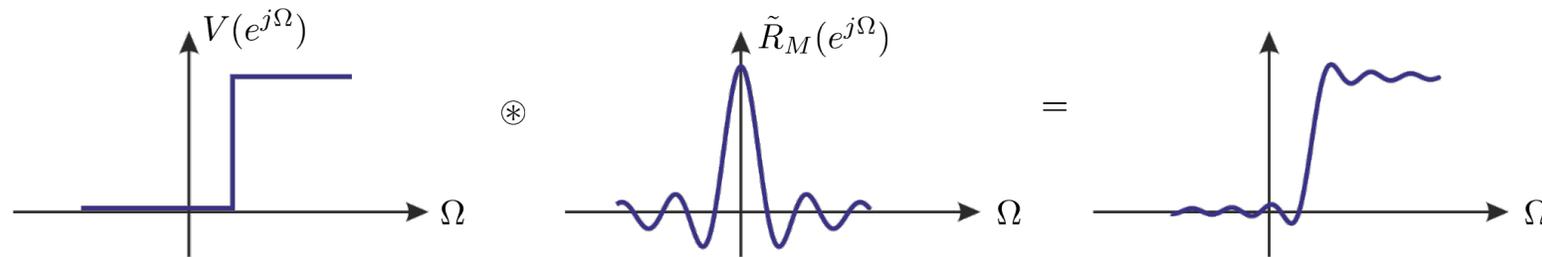


Das Spektrum stellt eine periodische Wiederholung dar.

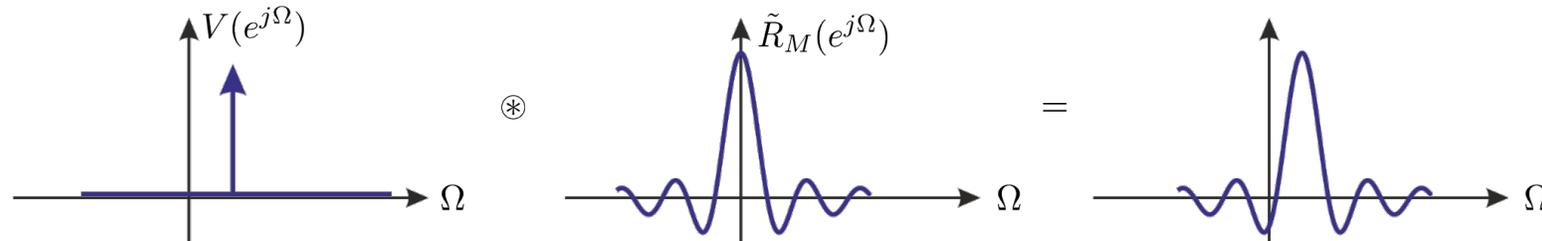
Eine Multiplikation im Zeitbereich mit dem Rechteckfenster stellt im Frequenzbereich eine Faltung dar. Dies bewirkt eine **Glättung bzw. Verbreiterung** (im Frequenzbereich) des ursprünglichen Spektrums (siehe folgende Folien).

### Fenstereffekte – Teil 3

Zur Verdeutlichung des zuvor angedeuteten **Verschmierens** des ursprünglichen Spektrums sei hier zunächst eine Faltung einer Sprungfunktion mit  $\tilde{R}_M(e^{j\Omega})$  dargestellt:



Zur Verdeutlichung der **spektralen Verbreiterung**: Faltung eines Dirac-Stoßes mit  $\tilde{R}_M(e^{j\Omega})$ :



**Fenstereffekte – Teil 4**

In der letzten Folie zeigte sich das spektrale Verschmieren bzw. Verbreitern aufgrund der Fensterung mit  $r_M(n)$ . Der Effekt kann reduziert werden, wenn  $\tilde{R}_M(e^{j\Omega})$  „**schmaler**“ wird. Der erste **Nulldurchgang** liegt bei

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{M}$$

und ist damit proportional zu  $1/M$ . Vergrößert man  $M$ , so wird auch  $\tilde{R}_M(e^{j\Omega}) = M$  größer. Im **Grenzfall**

$$M \rightarrow \infty$$

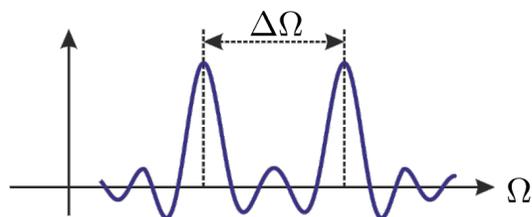
wird

$$\tilde{R}_M(e^{j\Omega}) \Big|_{M \rightarrow \infty} = \delta_0(\Omega)$$

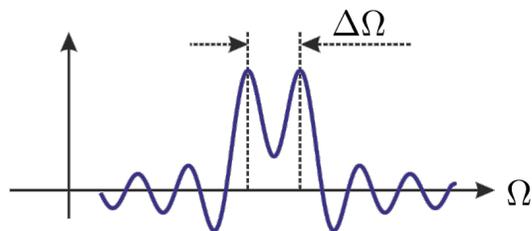
(bzw. mit periodischer Wiederholung). Da eine Faltung mit  $\delta_0(\Omega)$  wieder das ursprüngliche Spektrum liefert  $V(e^{j\Omega}) * \delta_0(\Omega) = V(e^{j\Omega})$ , hat in diesem Fall **die Fensterung keinen Effekt** mehr. Dies ist auch verständlich, da nun das **gesamte Signal**  $v(n)$ ,  $n \in \{-\infty, \dots, \infty\}$  **transformiert** wird.

### Fenstereffekte – Teil 5

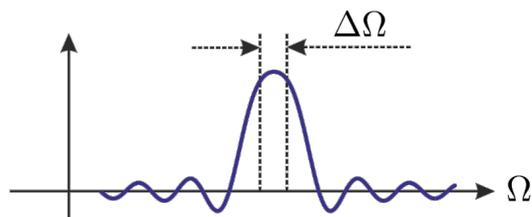
Als Folge einer Fensterung ergibt sich eine **begrenzte spektrale Auflösung**. Dies soll an folgendem Beispiel verdeutlicht werden. Es sollen zwei Schwingungen deren **Frequenzabstand**  $\Delta\Omega$  einstellbar ist mit einer endlich langen DFT (mit Rechteckfensterung) analysiert werden:



*Die einzelnen Spektrallinien sind gut zu unterscheiden (entweder ist  $\Delta\Omega$  oder  $M$  groß genug)*



*Der Frequenzabstand  $\Delta\Omega$  kommt nun in die Nähe von  $\Omega_0$  !*



*Der Frequenzabstand  $\Delta\Omega$  bzw.  $M$  ist nun zu klein – die beiden Spektrallinien können nicht mehr richtig unterschieden werden!*

## Spektralanalyse unendlich langer Signale mit der DFT/FFT – Teil 10

**Fenstereffekte – Teil 6**

Aus den bisherigen Überlegungen kann man folgenden qualitativen Zusammenhang herleiten.

Das **Verhältnis aus minimaler Auflösung der Analyse** (beschrieben durch  $\Delta\Omega$ ) und **Frequenzauflösung der Fensterfunktion** (beschrieben durch den ersten Nulldurchgang  $\Omega_0$ ) **sollte größer als Eins sein**:

$$1 \leq \frac{\Delta\Omega}{\Omega_0} = \underbrace{2\pi \frac{\Delta f}{f_A}}_{\Delta\Omega} \underbrace{\frac{M}{2\pi}}_{1/\Omega_0} = \Delta f \underbrace{MT_A}_{\Delta t} = \Delta f \Delta t.$$

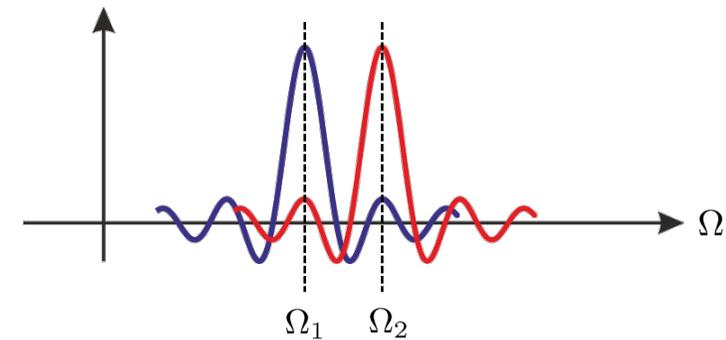
Dies beschreibt das **Produkt aus Zeitdauer und Bandbreite** – man spricht hier auch von einer **Unschärferelation**.

### Fenstereffekte – Teil 7

Weiterhin ist zu beachten, dass **durch die Fensterung die Messwerte verfälscht werden**. Dies liegt daran, dass für die Fensterfunktion gilt:

$$R_M(e^{j\Omega}) \neq 0, \quad \text{für } \Omega \neq 0.$$

Dadurch verfälschen auch „weiter entfernte“ Komponenten die Messung bei irgendeiner Frequenz. Man spricht dabei vom „**Leck-Effekt**“ (bzw. von „**leakage**“).



**Bei der ersten Spektralkomponente existiert ein additiver Anteil, der von der zweiten Spektralkomponente hervorgerufen wird (da  $R(e^{j(\Omega_2 - \Omega_1)}) \neq 0$ ) und umgekehrt.**

## Spektralanalyse unendlich langer Signale mit der DFT/FFT – Teil 12

**Fenstereffekte – Teil 8**

Das **Abtastraster** lässt sich durch **zero padding** beliebig **verfeinern**. Die **Auflösung** (im Sinne der Unschärferelation) wird dadurch aber **nicht besser**. Die **Verfälschung der Werte** (Leck-Effekt) lässt sich aber **reduzieren** – allerdings auf **Kosten der Auflösung**!

Die Reduzierung des Leck-Effekts kann durch **andere Fensterfunktionen** erzielt werden. Beim Entwurf der Fensterfunktion ist darauf zu achten, dass **der Frequenzgang schneller abklingt**. Dies geht allerdings im Allgemeinen mit einer sog. **breiteren „Hauptkeule“** (der erste Nulldurchgang wird später erreicht) einher.

Eine **andere Fensterfunktion** kann wie folgt aufgestellt werden:

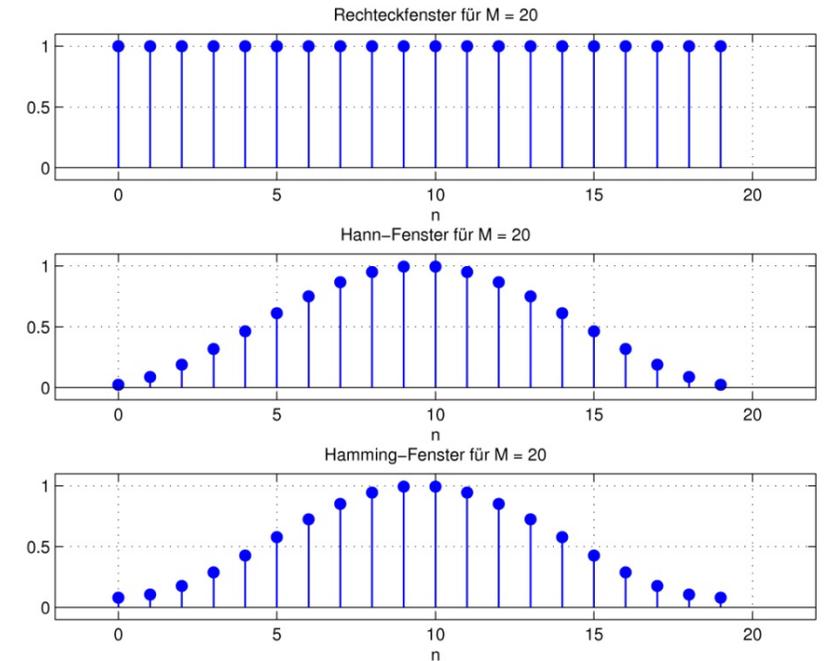
$$f_M(n) = \begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 \cos\left(n \frac{2\pi}{M-1}\right), & \text{falls } n \in \{0, 1, \dots, M-1\}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

### Fenstereffekte – Teil 9

Besondere Parametrierungen der neuen Fensterfunktion:

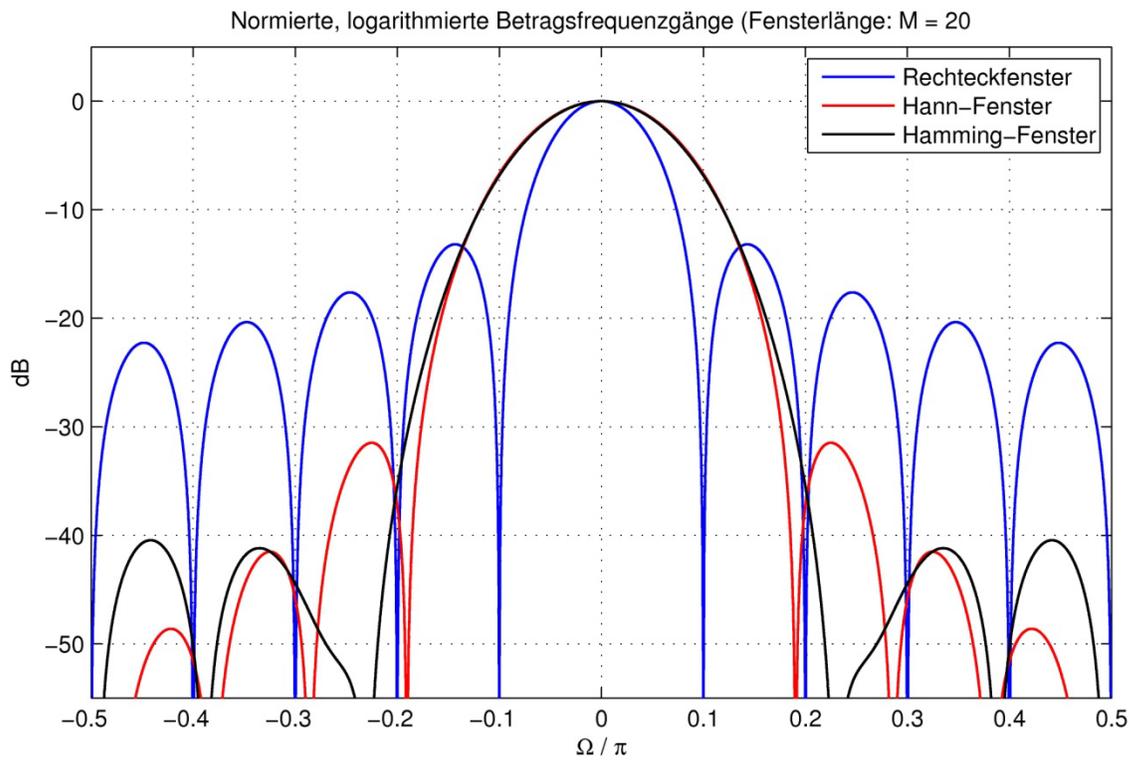
$$f_M(n) = \begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 \cos\left(n \frac{2\pi}{M-1}\right), & \text{falls } n \in \{0, 1, \dots, M-1\}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Für  $\alpha_0 = 0.50, \alpha_1 = -0.50$  ergibt sich das sog. **Hann-Fenster**.
- Für  $\alpha_0 = 0.54, \alpha_1 = -0.46$  ergibt sich das sog. **Hamming-Fenster**.



### Fenstereffekte – Teil 10

Vergleich der logarithmierten Betragsfrequenzgänge (normiert auf 0 dB) der drei Filterfunktionen:

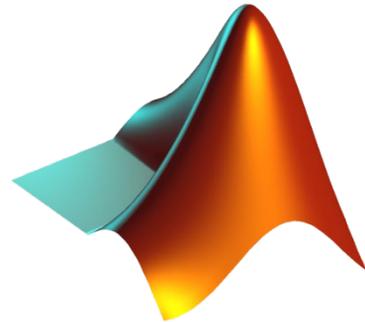


## Spektralanalyse unendlich langer Signale mit der DFT/FFT – Teil 15

### *Fenstereffekte – Teil 11*

Zur Veranschaulichung der Effekte von Fensterfunktion werden zwei Sinussignale unterschiedlicher Frequenz und Amplitude spektral untersucht.

*Durchführung gemeinsam  
in Matlab!*



## Verständnisfragen

### Partnerarbeit:

Versuchen Sie in Partnerarbeit folgende Aufgaben zu lösen:

- Was bewirkt die Fensterung, die Sie vornehmen müssen, um unendlich lange Signale mit einer DFT endlicher Ordnung zu analysieren?

.....  
.....

- Welchen „Kompromiss“ müssen Sie bei Fensterfunktionen eingehen?

.....  
.....

- Welche Nachteile bzw. Schwierigkeiten können in der Praxis entstehen, wenn Sie sehr lange Fensterfunktionen verwenden?

.....  
.....

## Messung stochastischer Kenngrößen – Teil 1

Im Folgenden setzen wir stets **Stationariät** voraus, d.h. die betrachteten Zufallsprozesse ändern ihre statistischen Eigenschaften nicht über der Zeit.

Allgemein versuchen wir stochastische Folgen (zeitdiskrete Zufallsprozesse) durch Kenngrößen dieser Folgen bzw. Prozesse zu beschreiben.

### □ Primäre Kenngrößen:

- Eindimensionale Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $f_v(v)$  bzw. Verteilungsdichtefunktion  $F_v(v)$
- Mehrdimensionale Dichte- bzw. Verteilungsfunktionen  $f_{v_1, v_2}(v_1, v_2)$ ,  $F_{v_1, v_2}(v_1, v_2)$

### □ Sekundäre Kenngrößen:

- Momente = bestimmte Erwartungswerte
  - Linearer Mittelwert  $m_v = E\{v(n)\}$
  - Varianz  $\text{Var}\{v(n)\} = E\{|v(n) - m_v|^2\}$
  - Autokorrelationsfunktion bzw. Leistungsdichtespektrum  $s_{vv}(k)$ ,  $S_{vv}(e^{j\Omega})$

### Messung stochastischer Kenngrößen – Teil 2

Wir wollen uns hier nun im Speziellen mit der **Schätzung der Autokorrelationsfunktion mittels einer DFT** beschäftigen.  
 Wir schätzen damit zunächst das **Autoleistungsdichtespektrum** und daraus dann die Autokorrelationsfunktion:

$$\hat{S}_{vv}(e^{j\Omega}) \longleftrightarrow \hat{s}_{vv}(k).$$

„**Schätzen**“ bzw. „**Messen**“ bedeutet in diesem Zusammenhang im Allgemeinen **den Übergang von einem Zufallsprozess zu einem Signal**, d.h. man versucht die **Scharmittelwerte** (Erwartungswerte) durch **Zeitmittelwerte** und (notgedrungen) durch **Mittelungen über endliche lange Signalstücke** zu ersetzen. Üblicherweise geht dies mittels Ergodizität, man kann dies allerdings auch weglassen, dann können allerdings nur Signalausagen und keine Prozessausagen getroffen werden.

### Periodogramm und Korrelation – Teil 1

Wir gehen von einem **endlich langen Stück** eines Zufallssignals aus. Dieses sei wie folgt definiert:

$$\tilde{v}(n) = \begin{cases} v(n), & \text{für } n \in \{0, 1, \dots, M-1\}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Durch **zeitliche Mittelung** erhalten wir daraus folgende Schätzung für die Autokorrelierte

$$\begin{aligned} \hat{s}_{vv}(k) &= \frac{1}{M} \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} \tilde{v}^*(\kappa) \tilde{v}(\kappa + k) \\ &\quad \dots \text{ Ersetzen von } \kappa \text{ durch } -\kappa \dots \\ &= \frac{1}{M} \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} \tilde{v}^*(-\kappa) \tilde{v}(k - \kappa). \end{aligned}$$

Dies entspricht der linearen Faltung

$$\hat{s}_{vv}(k) = \frac{1}{M} \left[ \tilde{v}^*(-\kappa) * \tilde{v}(\kappa) \right].$$

### Periodogramm und Korrelation – Teil 2

Durch **zero padding** (mit  $M - 1$  Nullen, da beide Signale die Länge  $M$  besitzen) können wir dies in eine zyklische Faltung überführen. Diese können wir dann wiederum effizient mit Hilfe der **FFT** berechnen. Hier führen wir zunächst das (nochmals) **erweiterte Signal**  $\hat{v}(n)$  mit folgenden Eigenschaften ein:

$$\begin{aligned} \hat{v}(n) &= \tilde{v}(n) \text{ für } n \in \{0, 1, \dots, \tilde{M} - 1\} \text{ mit } \tilde{M} \geq 2M - 1, \\ \hat{v}(n + \lambda\tilde{M}) &= \hat{v}(n). \end{aligned}$$

Aus der **Periodizität** mit  $\tilde{M}$  folgt:

$$\hat{v}(-n) = \hat{v}(\tilde{M} - n).$$

Für die **DFT** des Signals  $\hat{v}(n)$  ergibt sich

$$\text{DFT}\{\hat{v}(n)\} = V_{\tilde{M}}(\mu).$$

### Periodogramm und Korrelation – Teil 3

Für die DFT des Signal  $\hat{v}^*(\tilde{M} - n)$  ergibt sich

$$\text{DFT}\{\hat{v}^*(\tilde{M} - n)\} = \sum_{n=0}^{\tilde{M}-1} \hat{v}^*(\tilde{M} - n) e^{-j\frac{2\pi}{\tilde{M}}\mu n}$$

... „Doppeltes“ Konjugieren ...

$$= \left[ \sum_{n=0}^{\tilde{M}-1} \hat{v}(\tilde{M} - n) e^{j\frac{2\pi}{\tilde{M}}\mu n} \right]^*$$

... Substituieren von  $\tilde{M} - n$  durch  $k$  (Summationsgrenzen bleiben erhalten) ...

$$= \left[ \sum_{k=0}^{\tilde{M}-1} \hat{v}(\tilde{k}) e^{j\frac{2\pi}{\tilde{M}}\mu(\tilde{M}-k)} \right]^*$$

... Vereinfachen von  $e^{j\frac{2\pi}{\tilde{M}}\mu(\tilde{M}-k)} = \underbrace{e^{j\frac{2\pi}{\tilde{M}}\mu\tilde{M}}}_{=1} e^{-j\frac{2\pi}{\tilde{M}}\mu k}$  ...

$$= \left[ \sum_{k=0}^{\tilde{M}-1} \hat{v}(\tilde{k}) e^{-j\frac{2\pi}{\tilde{M}}\mu k} \right]^*$$

... Einsetzen der Definition der DFT ...

$$= V_{\tilde{M}}^*(\mu).$$

### Periodogramm und Korrelation – Teil 4

Damit ergibt sich insgesamt für die **Schätzung der Autokorrelationsfunktion**

$$\begin{aligned} \hat{s}_{vv}(k) &= \frac{1}{M} \left[ \tilde{v}^*(-n) * \tilde{v}(n) \right] \\ &\quad \dots \text{Einsetzen der schnellen Faltung} \dots \\ &= \frac{1}{M} \text{IDFT} \left\{ V_{\tilde{M}}(\mu) V_{\tilde{M}}^*(\mu) \right\} \\ &\quad \dots \text{Einsetzen der DFT (FFT)} \dots \\ &= \frac{1}{M} \text{IDFT} \left\{ \left| \text{DFT} \{ \hat{v}(n) \} \right|^2 \right\}. \end{aligned}$$

Die Größe

$$\left| V_{\tilde{M}}(\mu) \right|^2 = \left| \text{DFT} \{ \hat{v}(k) \} \right|^2$$

wird auch als **Periodogramm** bezeichnet (siehe weitere Bemerkungen auf der nächsten Folie).

### *Periodogramm und Korrelation – Teil 5*

Bemerkungen (Teil 1):

- Für das **Periodogramm** (erfunden von Schuster um ca. 1900 zur Detektion von verborgenen Periodizitäten [nicht auf FFT-Basis]) ist die **Signalverlängerung mit Nullen nicht erforderlich**. Es werden ja DFT-Abtastwerte der kontinuierlichen Fourier-Transformation berechnet, deren Betragsquadrate eine Näherung bzw. Schätzung für das Leistungsdichtespektrum abgeben.

**Zero padding ist erforderlich**, wenn eine Schätzung der Autokorrelation gemäß gängigen **Schätzverfahren, die im Zeitbereich definiert sind**, durchgeführt werden soll (mit Hilfe der DFT/FFT). Ohne **zero padding** würde **die lineare Faltung in eine zyklische Faltung des Signalstücks mit sich selbst übergehen**.



Arthur Schuster

**Bildquelle:**  
**Wikipedia**

## Stochastische Signale – Teil 8

### *Periodogramm und Korrelation – Teil 6*

Bemerkungen (Teil 2):

- ❑ Man kann mit statistischen Mitteln zeigen, wie gut sich die Zufallsprozessgröße „Leistungsdichtespektrum“ durch ein Periodogramm schätzen lässt. Man stellt dabei fest, dass
  - ❑ die **Schätzung nicht besser wird**, wenn man die **DFT-Ordnung vergrößert** (d.h. keine konsistente Schätzung, aber
  - ❑ eine **Verbesserung** erreicht werden kann, wenn mehrere Blöcke in Periodogramme überführt werden und dann die **Periodogramme (punktweise) gemittelt werden**.

*Für weitere Details zu diesem Thema sei auf die Literatur verwiesen, z.B.: K. D. Kammeyer, K. Kroschel: Digitale Signalverarbeitung. Filterung und Spektralanalyse mit MATLAB-Übungen, Teubner, 5. Auflage, Teubner-Verlag, 2002.*

## Verständnisfragen

### Partnerarbeit:

Versuchen Sie in Partnerarbeit folgende Aufgaben zu lösen:

- Vergleichen Sie den Aufwand von Korrelationsschätzungen im Zeit- und Frequenzbereich, wenn die Autokorrelierte bis zum Versatz 1000 bestimmt werden soll.

.....  
.....

- Wofür können Autokorrelationsanalysen genutzt werden? Fallen Ihnen Anwendungen ein?

.....  
.....

- Wie würden Sie eine Einfallswinkelschätzung auf der Basis einer Kreuzkorrelationsanalyse „bauen“, wenn Sie einige Sensorpaare verwenden dürfen?

.....  
.....

## Abschließende Zusammenfassung

- ❑ Einführung
- ❑ Signale
- ❑ **Spektren**
  - ❑ **Definitionen**
  - ❑ **Faltung und Faltungssätze**
  - ❑ **Schnelle Berechnung der Diskreten Fourier Transformation (Fast Fourier Transform – FFT)**
  - ❑ **Spektralanalyse unendlich langer Signale und Prozesse**
  - ❑ **Stochastische Signale (Zufallsprozesse)**
- ❑ Digitale Filter