

Digitale Signalverarbeitung

Teil 2: Signale

Gerhard Schmidt

Christian-Albrechts-Universität zu Kiel

Technische Fakultät

Elektrotechnik und Informationstechnik

Digitale Signalverarbeitung und Systemtheorie



Abschnittsübersicht

- Einführung
- **Signale**
 - **Signalarten**
 - **Analog-Digital- und Digital-Analog-Umsetzungen**
 - **Halteglieder**
 - **Taktreduktion und Takterhöhung**
- Spektren
- Digitale Filter



Signalarten – Teil 1

Hier behandelte Signale – Teil 1:

Im Rahmen dieser Vorlesung werden fast ausschließlich **diskrete Signale**

$$v(n), v \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z},$$

d.h. Signale mit folgenden Eigenschaften:

- ❑ nummerierte Zahlenfolgen,
- ❑ eindimensional,
- ❑ determinierte oder stochastische, bzw.
- ❑ periodische oder aperiodische,

behandeln. Gelegentlich verwenden wir auch **digitale Signale**

$$[v(n)]_{\mathbb{Q}}, [v]_{\mathbb{Q}} \in \mathbb{C}, \text{ wertdiskret, } n \in \mathbb{Z},$$

d.h. quantisierte Signale, wobei $v(n)$ durch Abtastung eines kontinuierlichen Signals $v_0(t)$ entstanden sein kann:

$$v(n) = v_0(nT_A) \quad \text{mit der Abtastfrequenz} \quad f_A = \frac{1}{T_A}.$$

Die Abtastfrequenz ist hierbei entsprechend des Abtasttheorems zu wählen (siehe Vorlesung „Signale und Systeme“)

Signalarten – Teil 2

Hier behandelte Signale – Teil 2:

Als Folge der Abtastung ergibt sich eine periodische Wiederholung des ursprünglichen Spektrums mit den Perioden

$$f_{\text{Periode}} = f_A \hat{=} \omega_{\text{Periode}} = 2\pi f_A = \omega_A,$$

Fourier-Transformation für kontinuierliche Signale bzw. Laplace-Transformation

$$\Omega_{\text{Periode}} = 2\pi = \omega_A T_A,$$

Fourier-Transformation von Folgen bzw. z-Transformation

$$\mu_{\text{Periode}} = M.$$

Fourier-Reihe bzw. DFT

Wiederholung – Teil 1

Transformationen – Teil 1:

Fourier-Transformationen

$$V_0(j\omega) = \mathcal{F}\{v_0(t)\} = \int_{t=-\infty}^{\infty} v_0(t) e^{-j\omega t} dt,$$

Fourier-Transformation für kontinuierliche Signale

$$V(e^{j\Omega}) = \mathcal{F}\{v(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v(n) e^{-j\Omega n} \stackrel{\Omega = \omega T_A}{=} \frac{1}{T_A} \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} V_0\left(j\left(\omega + \lambda \frac{2\pi}{T_A}\right)\right).$$

Fourier-Transformation für diskrete Signale

Laplace- und z-Transformation

$$V_0(s) = \mathcal{L}\{v_0(t)\} = \int_{t=-\infty}^{\infty} v_0(t) e^{-st} dt,$$

Laplace-Transformation

$$V(z) = \mathcal{Z}\{v(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v(n) z^{-n} \stackrel{z = e^{-sT_A}}{=} \frac{1}{T_A} \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} V_0\left(s + j\lambda \frac{2\pi}{T_A}\right).$$

z-Transformation

Wiederholung – Teil 2

Transformationen – Teil 2:

□ Fourier-Reihe und DFT

$$c_\mu = \int_{t=t_0}^{t_0+T} v_0(t) e^{-j\mu \frac{2\pi}{T} t} dt,$$

Fourier-Reihe

$$V_M(\mu) = \text{DFT}\{v(n)\} = \sum_{n=0}^{M-1} v(n) e^{-j\mu \frac{2\pi}{M} n} \stackrel{T=MT_A}{=} M \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} c_{\mu+\lambda M}.$$

Diskrete Fourier-Transformation

- Die hier genannten Zusammenhänge gelten bei **idealer Abtastung**, beschrieben durch Multiplikation von $v_0(t)$ mit einem „**Dirac-Impulskamm**“.
- Bei **realer Abtastung**, beschrieben durch Multiplikation mit periodischen Impulsen endlicher Breite und Höhe, werden die spektralen Wiederholungen jeweils gedämpft.

Digitalisierung (Analog-Digital-Umsetzung) – Teil 1

Grundlagen – Teil 1:

□ Digitalisierung

Darstellung der Abtastwerte durch Ziffern (*digits*), praktisch sind dies fast immer Binärziffern (0 oder 1), d.h. Bits.

□ Voraussetzung

Zuordnung ganzer Bereiche der zunächst wertkontinuierlichen Größe v zu „Nummern“ (**Quantisierung**)

□ Realisierbarkeit

Pro Nummer entsteht eine endliche Zifferanzahl. Die Anzahl der (Binär-) Ziffern wird **Wortlänge** w genannt.
Es gilt dabei:

Eine Wortlänge w ermöglicht 2^w mögliche Zahlen.

□ Folge

$v(n)$ bzw. $\text{Re}\{v(n)\}$, $\text{Im}\{v(n)\}$ (wenn $v(n) \in \mathbb{C}$) können nur in einen begrenzten **Aussteuerungsbereich** D mit w Bit in 2^w Intervalle „einsortiert“ und so durch Zahlen dargestellt werden.

Übersteuerungen i.A. unvermeidlich!

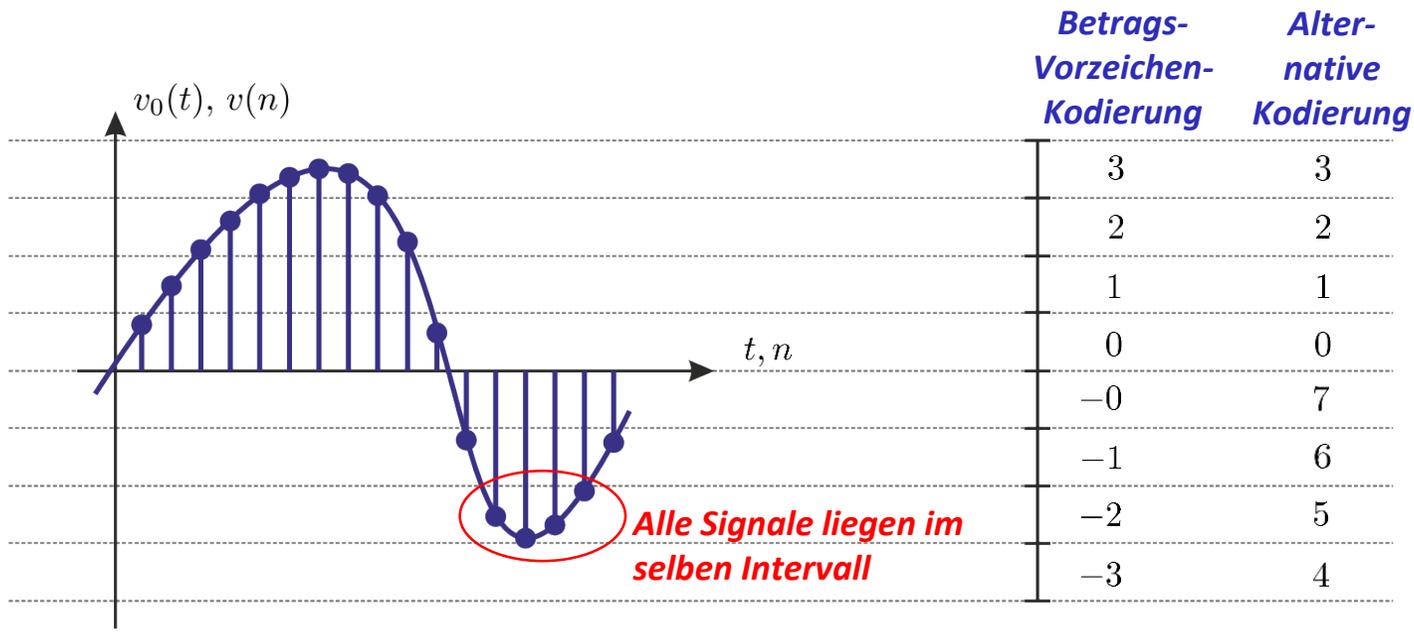


Digitalisierung (Analog-Digital-Umsetzung) – Teil 2

Grundlagen – Teil 2:

Eine der einfachsten Quantisierungen erreicht man durch eine Unterteilung von D in 2^w **gleich große Intervalle** der Größe

$Q = \frac{D}{2^w}$. *Diese Größe wird „Quantisierungsstufe“ genannt.*



Digitalisierung (Analog-Digital-Umsetzung) – Teil 3

Grundlagen – Teil 3:

Durch die Zuordnung aller (verschiedener) Werte innerhalb eines Intervalls zur selben Nummer entstehen unvermeidliche Fehler durch die digitale Darstellung. Man nennt solche Fehler

Quantisierungsfehler.

Dies ist ein unvermeidlicher Nachteil jeder Digitalisierung (dem stehen aber viele Vorteile gegenüber).

Quantisierungsfehler können durch erhöhten Aufwand (***höhere Wortlängen***) und erhöhte Genauigkeit ***klein gehalten*** werden.

Digitalisierung (Analog-Digital-Umsetzung) – Teil 4

Quantisierungskennlinien – Teil 1:

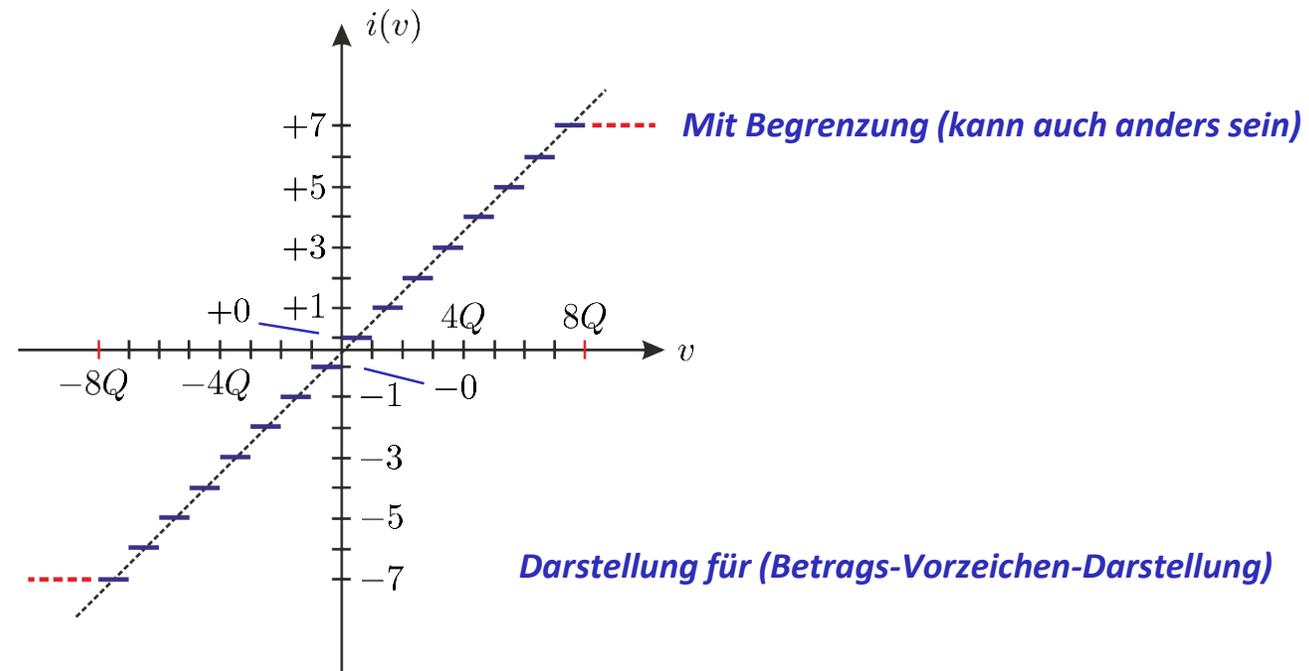
Üblicherweise werden Analog-Digital-Umsetzer (ADU bzw. ADC, englisch für *analog-to-digital converter*) durch eine sog. **Quantisierungskennlinie** $i(v)$ beschrieben.

Damit wird eine Zuordnung der Signalwerte v zur Intervallnummer i gekennzeichnet.

Beispiel 1:

sog. *mid-rise*-Kennlinie

Dies ist offenbar ein nichtlineares System, d.h. der Überlagerungssatz gilt nicht mehr! Aber: die Kennlinie verhält sich „im Mittel“ linear (bei konstanter Stufenhöhe Q).



Digitalisierung (Analog-Digital-Umsetzung) – Teil 5

Quantisierungskennlinien – Teil 2:

Analog-Digital-Umsetzungen mit „linearen Kennlinien“ werden als **lineare Quantisierungen** bezeichnet. Von **nicht-linearen Quantisierungen** spricht man dann offenbar wenn – anders als zuvor dargestellt – gilt:

$$Q = Q(v) \neq \text{const. } \forall v.$$

Dies kann

- entweder **gezielt** bzw. **gewollt** sein (z.B. zur Signalkompression)
- oder aber auch **störend** und **ungewollt** sein (z.B. durch ADU-Ungenauigkeiten).

Die zuvor dargestellte Kennlinie ist nicht die einzig mögliche. Im folgenden werden wir noch einige weitere Möglichkeiten kennenlernen.

Darüber hinaus lässt sich die (bisher unberücksichtigte) **Übersteuerung** von D (meist $\pm D/2$) unterschiedlich behandeln – nicht nur durch die zuvor angedeutete **Begrenzung** (ein solches Verhalten wird **Sättigungs-Kennlinie** genannt, engl. *saturation*).

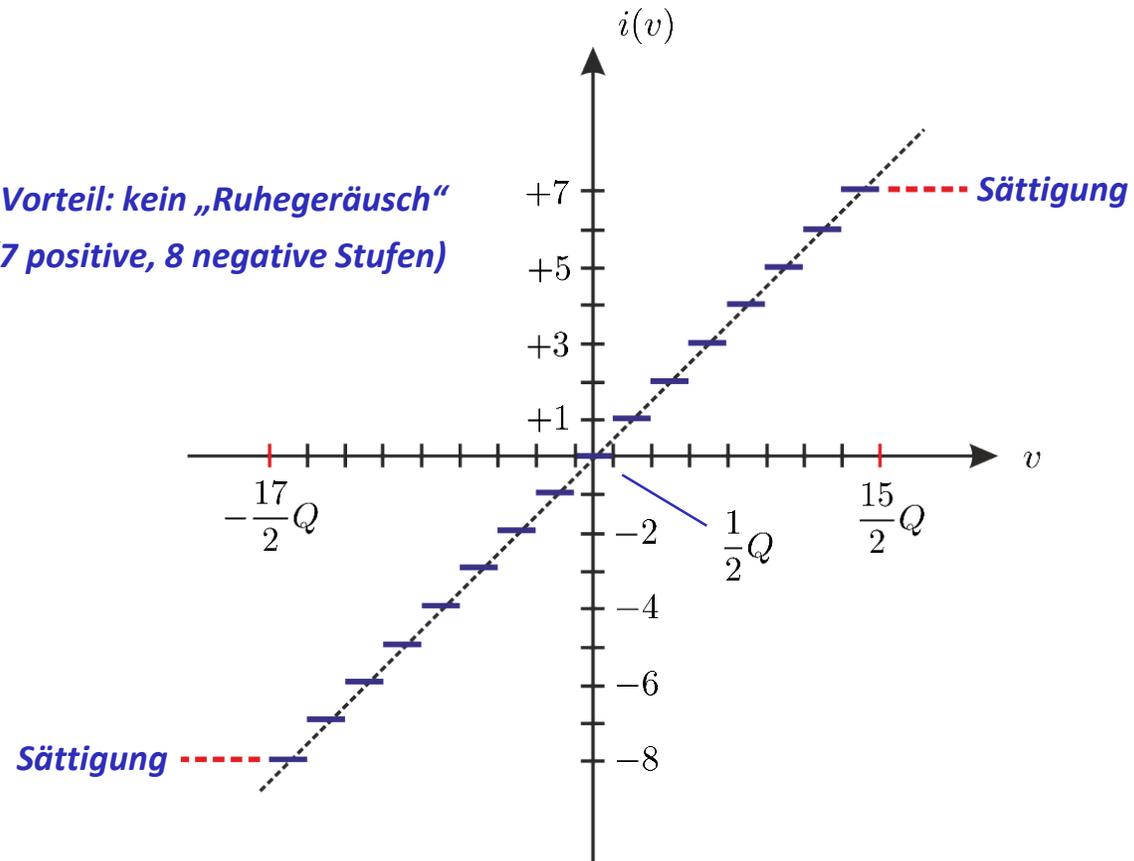
Auch muss die **Nummerierung (Codierung)** nicht einer Betrags-Vorzeichen-Darstellung folgen, im Prinzip sind **beliebige Zuordnungen** denkbar und sinnvoll (je nach Anwendung).

Digitalisierung (Analog-Digital-Umsetzung) – Teil 6

Quantisierungskennlinien – Teil 3:

Die sog. *mid-bead*-Kennlinie

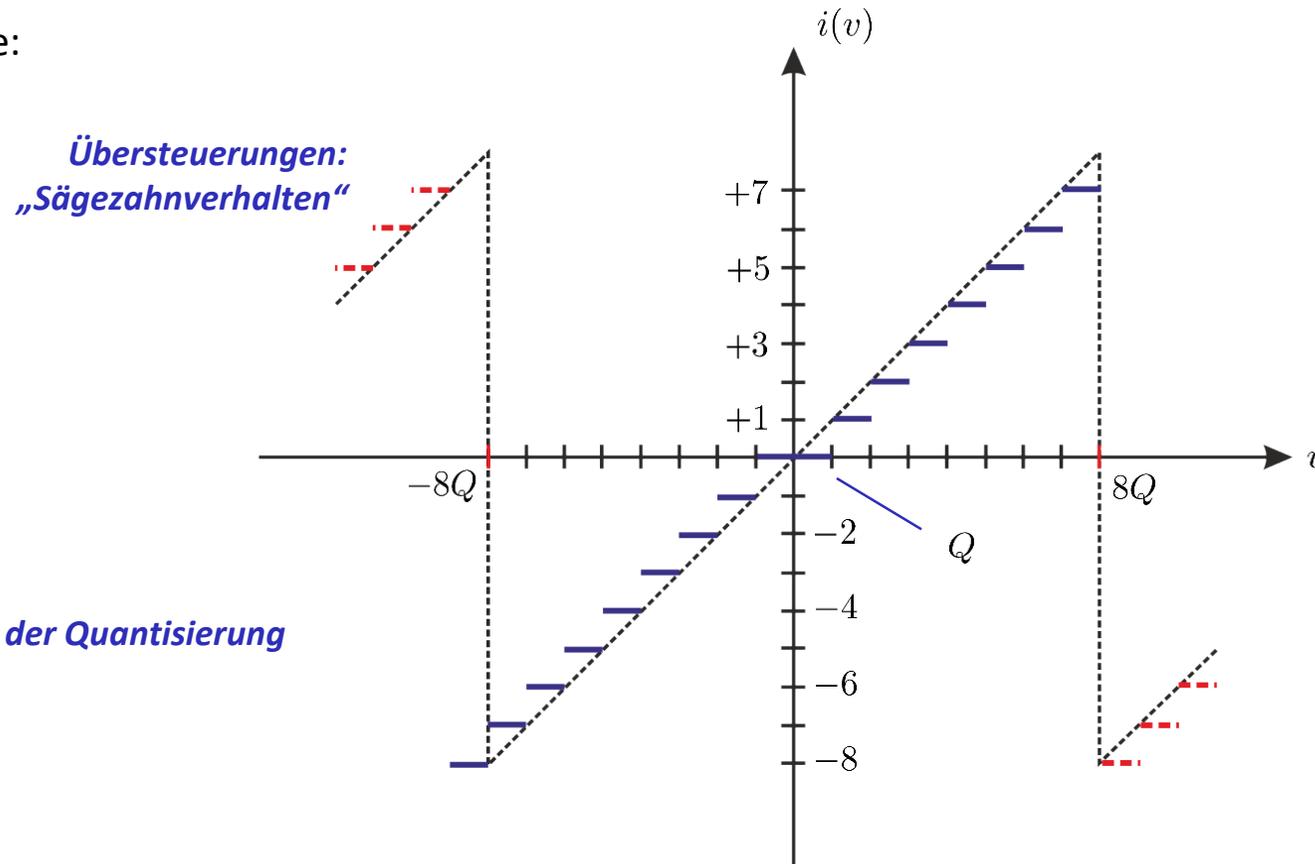
Vorteil: kein „Ruhegeräusch“
Nachteil: Asymmetrie (7 positive, 8 negative Stufen)



Digitalisierung (Analog-Digital-Umsetzung) – Teil 7

Quantisierungskennlinien – Teil 4:

Eine dritte Kennlinie:

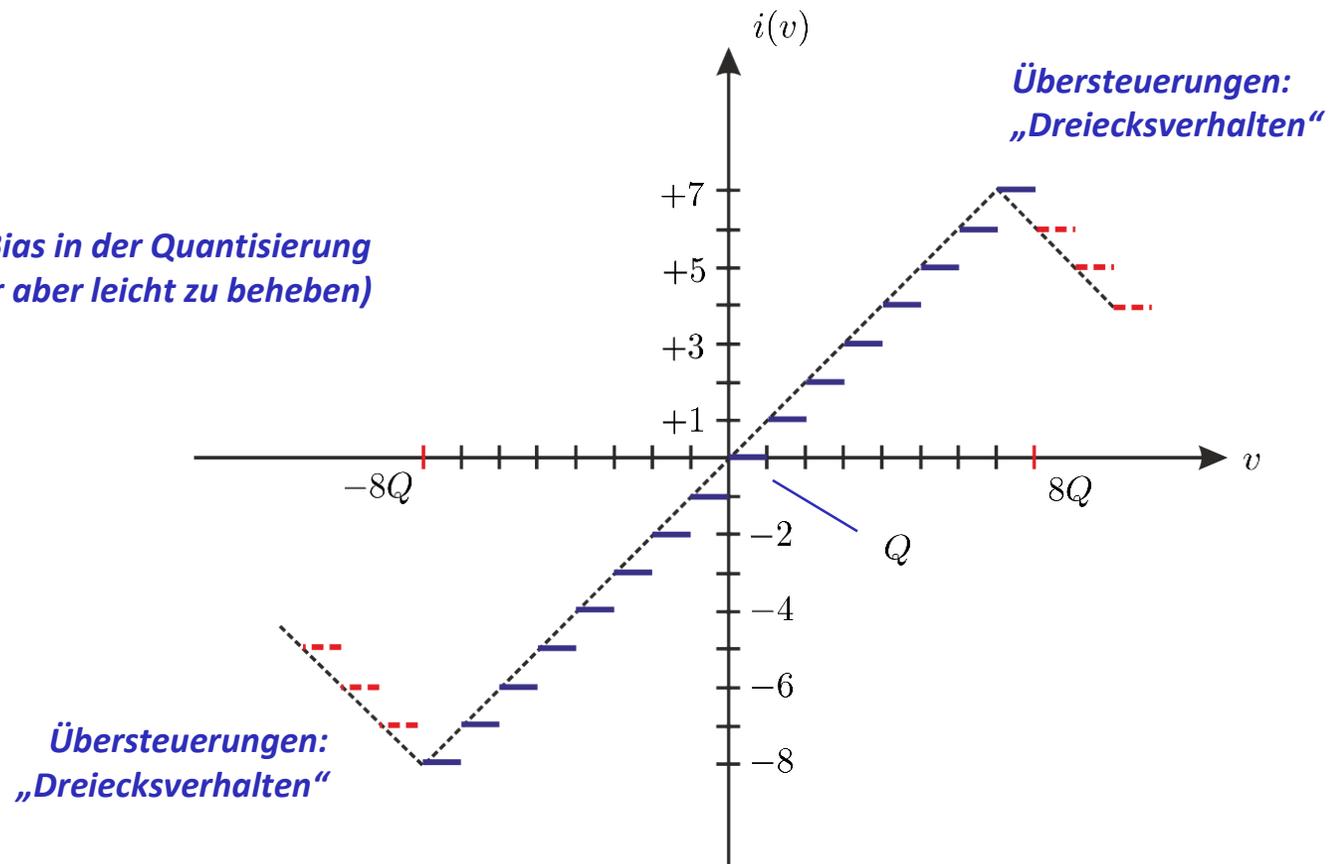


Digitalisierung (Analog-Digital-Umsetzung) – Teil 8

Quantisierungskennlinien – Teil 5:

Eine vierte Kennlinie:

*Nachteil: Bias in der Quantisierung
(hier aber leicht zu beheben)*

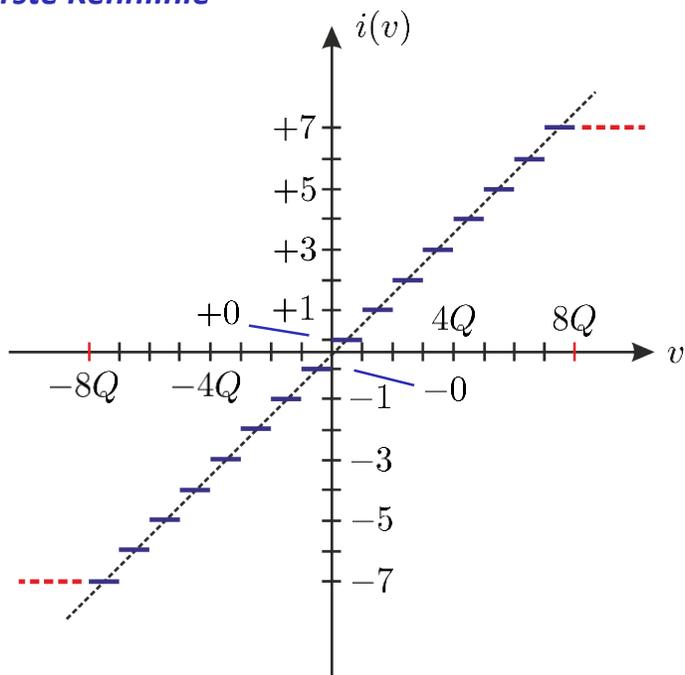


Digitalisierung (Analog-Digital-Umsetzung) – Teil 9

Quantisierungskennlinien – Teil 6:

Zuordnung von Intervallen und Intervallnummern:

Erste Kennlinie



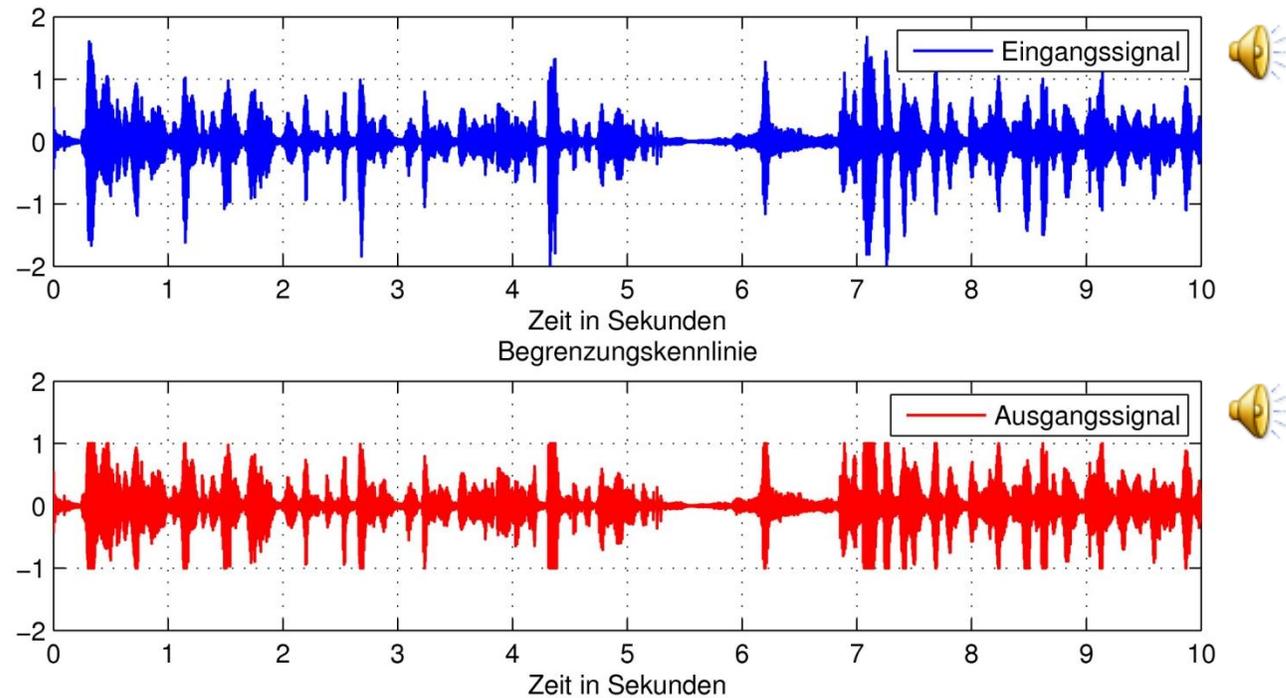
(Vorzeichenbit)

Intervall (von ... bis)	Dez.	Binär	Zweier- komple- ment
7 ... 8	+7	0111	0111
6 ... 7	+6	0110	0110
5 ... 6	+5	0101	0101
...
1 ... 2	+1	0001	0001
0 ... 1	+0	0000	0000
-1 ... 0	-0	1000	0000
-2 ... -1	-1	1001	1111
-3 ... -2	-2	1010	1110
...
-8 ... -7	-7	1111	1001

Digitalisierung (Analog-Digital-Umsetzung) – Teil 10

Quantisierungskennlinien – Teil 7:

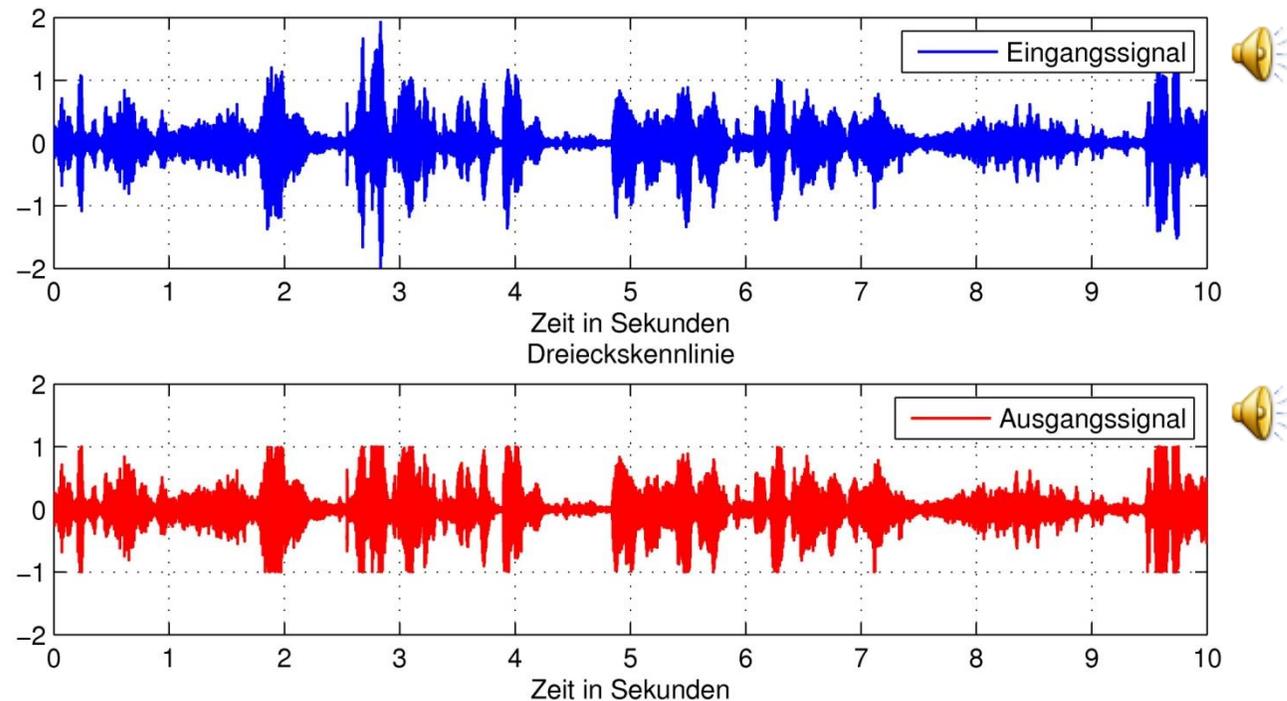
Beispiel für eine „Begrenzungskennlinie“ (Begrenzung auf -1 ... +1):



Digitalisierung (Analog-Digital-Umsetzung) – Teil 11

Quantisierungskennlinien – Teil 8:

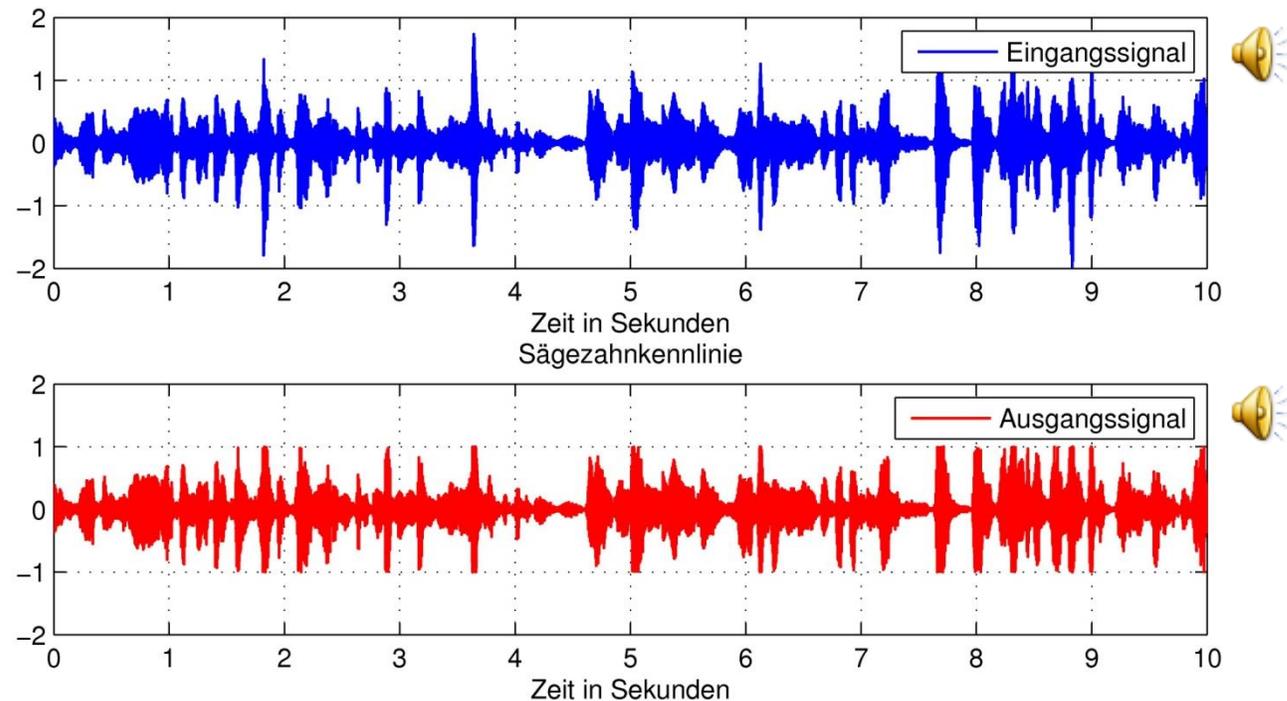
Beispiel für eine „Dreieckskennlinie“ (Begrenzung auf -1 ... +1):



Digitalisierung (Analog-Digital-Umsetzung) – Teil 12

Quantisierungskennlinien – Teil 9:

Beispiel für eine „Sägezahnkennlinie“ (Begrenzung auf -1 ... +1):



Verständnisfragen

Partnerarbeit:

Versuchen Sie in Partnerarbeit folgende Fragen zu beantworten:

- Nennen Sie Beispiele für ein- und mehrdimensionale Skalar- bzw. Vektorsignale!

.....
.....

- Welches Verhalten gibt es zur Handhabung von Übersteuerungen?
Wie unterscheiden sich die einzelnen Kennlinien (Vor- und Nachteile)?

.....
.....

- Warum sollte man „nichtlineare“ Quantisierungskennlinien verwenden?

.....
.....

Digital-Analog-Umsetzung (DAU)

Grundlegendes:

Unter einer Digital-Analog-Umsetzung (DAU) versteht man die **Zuordnung eines „Analog-Wertes“** (z.B. einer Spannung) **zum Zahlen- bzw. Nummern-Wert** i :

$$i(n) \implies [y(n)]_Q = [y_0(nT_A)]_Q$$

Dies stellt die „Umkehrung“ (näherungsweise) der Analog-Digital-Umsetzung dar. Dieser Schritt erfolgt auch, wenn mit dem Index $i(n)$ digital als Signalwert gerechnet wird (dann ist z.B. die Vorzeichen-Betrags-Darstellung sinnvoll).

Ausgangswerte und Quantisierungsfehler – Teil 1

Digital-Analog-Umsetzungen (DAU):

Offensichtlich ist es sinnvoll, wenn der Wert $[v(n)]_Q$ **innerhalb des i -ten Intervalls** liegt (in diesem liegt ja auch der ursprüngliche Signalwert $v(n)$).

Grundsätzlich ersetzt der Wert $[v(n)]_Q$ die unendlich vielen möglichen Werte von $v(n)$ in diesem Intervall:

$$[v(n)]_Q = [v_0(nT_A)]_Q \stackrel{\text{i.A.}}{\neq} v(n) = v_0(nT_A).$$

Man definiert hierzu den sog. **Quantisierungsfehler**

$$\Delta v(n) = [v(n)]_Q - v(n).$$

Eine **sinnvolle Zuordnung** der wertkontinuierlichen Eingangsgröße v der Analog-Digital-Umsetzung zur wertdiskreten Ausgangsgröße $[v(n)]_Q$ der Digital-Analog-Umsetzung ist z.B. die **Mitte des Intervalls** in dem die Eingangsgröße liegt (siehe nächste Folie).

Angangswerte und Quantisierungsfehler – Teil 2

Grundlegendes – Teil 2:

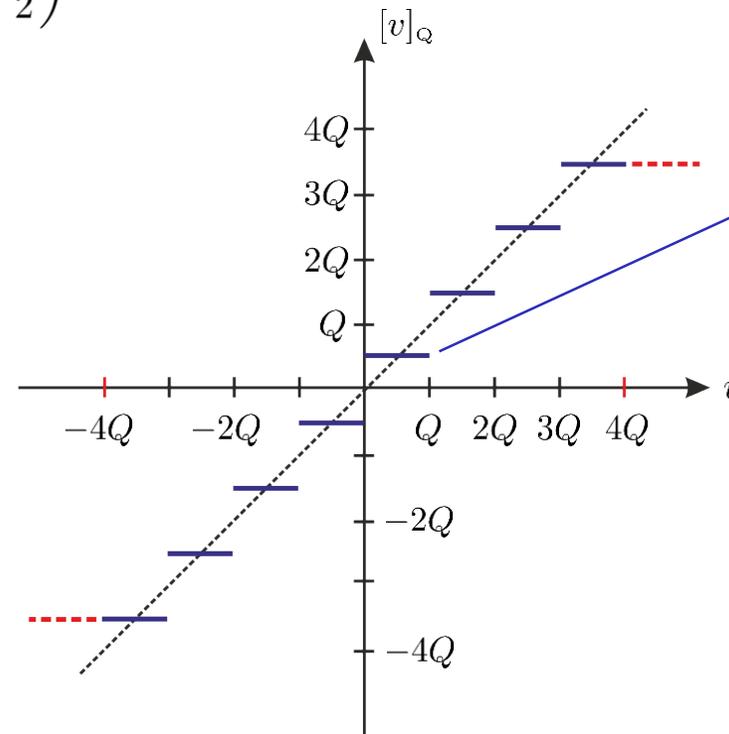
Sinnvolle **Zuordnung bei AD-DA-Kennlinienpaaren:**

$$v \in [iQ, (i + 1)Q) \implies [v]_Q = \left(i + \frac{1}{2}\right) Q.$$

Für den **Quantisierungsfehler** gilt dann

$$\Delta v \in \left(-\frac{Q}{2}, \frac{Q}{2}\right].$$

(Übersteuerungen werden hierbei zunächst noch nicht betrachtet).



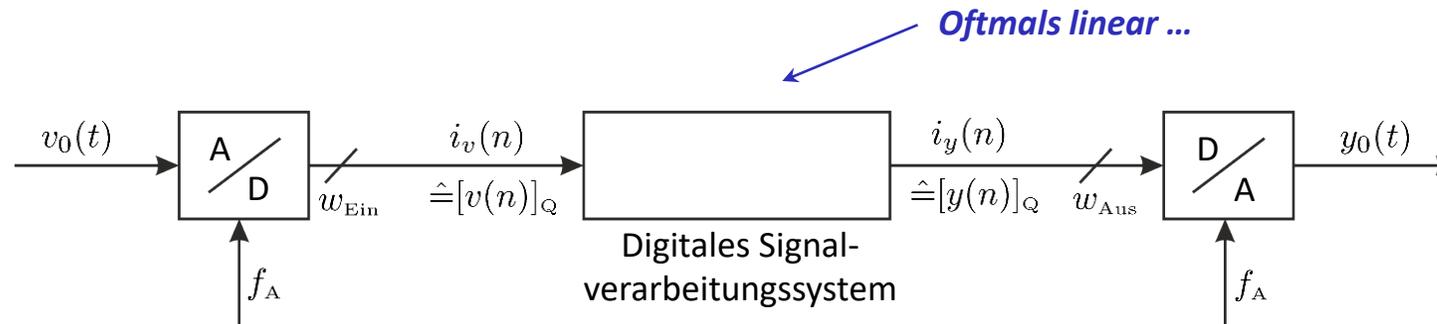
Werte aus dem Intervall [0, Q] werden der Nummer +0 zugeordnet. Dies entspricht dem Wert Q/2.

Ausgangswerte und Quantisierungsfehler – Teil 3

Grundlegendes – Teil 3:

Zusammenfassend kann man festhalten, dass die **AD-DA-Wandlungskombination** $v \iff [v]_{\text{Q}}$ nichtlinear (und nicht eindeutig umkehrbar) ist. Damit ist jedes System, das mit einem AD-Wandler beginnt und mit einem DA-Wandler endet, **nichtlinear!**

Systemübersicht:



Typisches System zur digitalen Verarbeitung analoger Signale

Ausgangswerte und Quantisierungsfehler – Teil 4

Grundlegendes – Teil 4:

Auch wenn das eigentliche digitale Signalverarbeitungssystem linear ist, entfällt die Nutzung der bekannten Werkzeuge zur Behandlung linearer Systeme! Hinzu kommt, dass im digital realisierten System stets **Wortlängenverkürzungen** nötig sind. **Demnach ist kein digitales Signalverarbeitungssystem jemals linear!**

Ausweg – Teil 1:

□ Erste Annahme:

Die Analog-Digital-Umsetzung kann $v_0(nT_A)$ mit **unendlich vielen, unendlich kleinen Stufen** darstellen (d.h. $D \rightarrow \infty, Q \rightarrow 0, \Rightarrow w \rightarrow \infty$). Die tatsächliche Begrenzung von ∞ -vielen auf w_{Ein} Bits am Eingang ($w_{\text{Ein}} = \text{ADU-Wortlänge}$) wird **als additive Störung modelliert** (additiv zu $v(n)$, das dann $i_v(n)$ ersetzt).

□ Zweite Annahme:

Im Systeminneren gibt es (zunächst) **keine zusätzlichen Wertdiskretisierungen** – damit kann das digitale Signalverarbeitungssystem selbst **linear** sein: $i_y(n)$ kann durch $y(n)$ ersetzt werden.

Angangswerte und Quantisierungsfehler – Teil 5

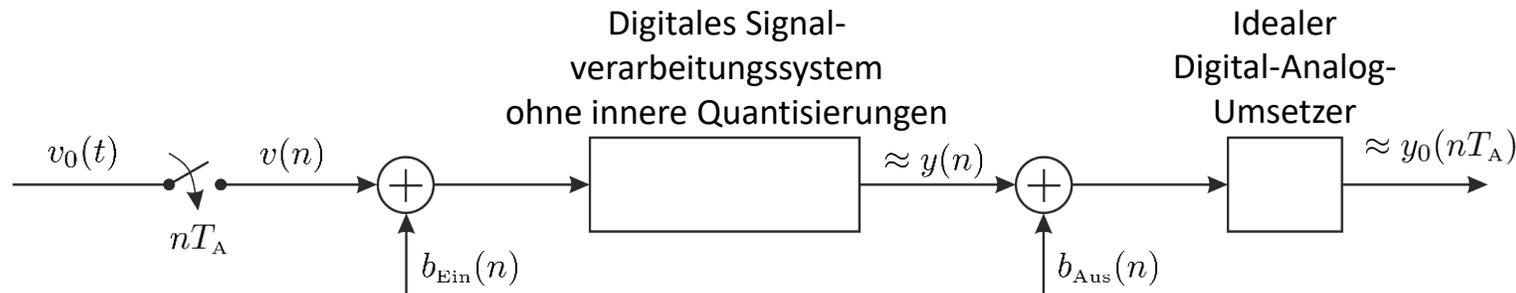
Grundlegendes – Teil 5:

Ausweg – Teil 2:

□ **Dritte Annahme:**

Die Digital-Analog-Umsetzung macht aus $y(n)$ ein wertkontinuierliches Signal. Die tatsächlich auftretende **Quantisierung** mit w_{Aus} Bits am Ausgang ($w_{\text{Aus}} = \text{DAU-Wortbreite}$) wird **als additive Störung modelliert**.

Damit ergibt sich als **Ersatzmodell** für das zuvor skizzierte Gesamtsystem:



Am Ausgang erhält man ein diskretes Signal. Die Umwandlung in ein analoges Signal wird uns im Folgenden beschäftigen, zuvor soll aber erst die Modellierung der Ungenauigkeiten durch additives Rauschen untersucht werden.

Ausgangswerte und Quantisierungsfehler – Teil 6

Quantisierungsrauschen – Teil 1:

Quantisierung determinierter Signale



determinierter Quantisierungsfehler
(aus der Kennlinie $v \rightarrow [v]_Q$ abzulesen)

Diese Behandlung von Quantisierungsfehlern
ist sehr unhandlich.



Man weicht daher auf eine **stochastische
Betrachtungsweise** aus.

Hierzu werden folgende **Modellannahmen** getroffen:

- Übersteuerungen** seien **ausgeschlossen**.
- Die **Quantisierung sei fein genug**, d.h. viele Intervalle werden angesteuert.
- Es wird angenommen, dass alle Werte im angesteuerten Intervall **gleich wahrscheinlich** sind.

**Diese Annahmen erlauben es den Quantisierungsprozess
als Erzeugung einer Störung zu beschreiben.**

Ausgangswerte und Quantisierungsfehler – Teil 7

Quantisierungsrauschen – Teil 2:

Das Quantisierungsrauschen $b(n)$ lässt sich als additive Rauschquelle mit folgenden Eigenschaften modellieren:

- Die Wahrscheinlichkeitsdichte des Rauschprozesses wird als **Gleichverteilung** angenommen.
- Die einzelnen Signalwerte des Prozesses werden als **unkorreliert** voneinander angenommen, d.h.

$$E\{b(n) b(n + \kappa)\} = E\{b(n)\} E\{b(n + \kappa)\} \quad \forall \kappa \neq 0.$$

- Der Rauschprozess $b(n)$ und das Eingangssignal $v(n)$ werden als **statistisch unabhängig** voneinander modelliert

$$f_{vb}(v, b) = f_v(v) f_b(b).$$

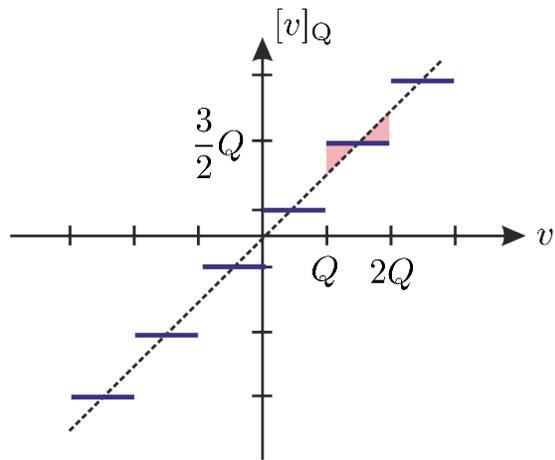
← Wahrscheinlichkeitsdichten

Damit sind diese Prozesse auch **unkorreliert**:

$$E\{v(n) b(n + \kappa)\} = E\{v(n)\} E\{b(n + \kappa)\}.$$

Quantisierungsrauschen – Teil 3:

Für die beiden „Rundungskennlinien“ gilt dann für die **Wahrscheinlichkeitsdichte** des Quantisierungsrauschens:



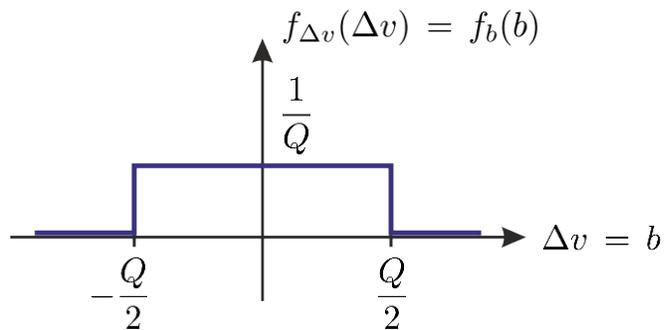
$$f_{\Delta v}(\Delta v) = f_b(b) = \begin{cases} \frac{1}{Q}, & \text{falls } |b| \leq \frac{Q}{2}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Daraus ergibt sich folgender **Mittelwert**:

$$\begin{aligned} m_b &= E\{b(n)\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} b f_b(b) db = 0. \end{aligned}$$

Für die **Varianz** erhält man:

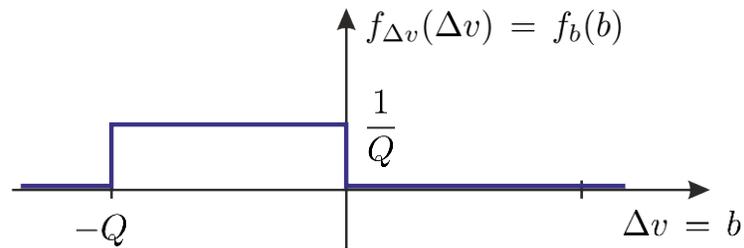
$$\begin{aligned} \sigma_b^2 &= E\{(b(n) - m_b)^2\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (b - 0)^2 f_b(b) db = \frac{Q^2}{12}. \end{aligned}$$



Ausgangswerte und Quantisierungsfehler – Teil 9

Quantisierungsrauschen – Teil 4:

Für die „**Zweierkomplement-Abschneide**“-Kennlinie ergibt sich:

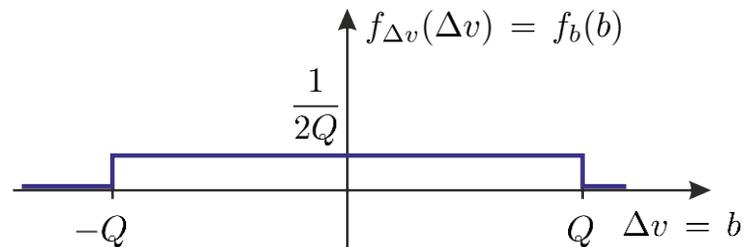


$$f_b(b) = \begin{cases} \frac{1}{Q}, & \text{falls } -Q \leq b < 0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$m_b = -\frac{Q}{2},$$

$$\sigma_b^2 = \frac{Q^2}{12}.$$

Für die „**Betrags-Abschneide**“-Kennlinie ergibt sich für die Quantisierung von Werten nahe bei Null:



$$f_b(b) = \begin{cases} \frac{1}{2Q}, & \text{falls } -Q \leq b < Q, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$m_b = 0,$$

$$\sigma_b^2 = \frac{Q^2}{3}.$$

Ausgangswerte und Quantisierungsfehler – Teil 10

Quantisierungsrauschen – Teil 5:

Für die „**Betrags-Abschneide**“-Kennlinie modelliert man die Quantisierungsfehler außerhalb des Intervalls rund um die Null gemäß

$$\Delta v(n) = b(n) = -\frac{Q}{2} \operatorname{sgn}\{v(n)\} + b'(n).$$

Der erste Teil bewirkt eine Mittelwertskorrektur (je nach dem ob man im positiven oder negativen Bereich der Kennlinie quantisiert). Das verbleibende Quantisierungsrauschen wird wieder als gleichverteilt und unkorreliert angenommen:

$$f_{b'}(b') = \begin{cases} \frac{1}{Q}, & \text{falls } \frac{Q}{2} \leq b' < \frac{Q}{2}, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$m_{b'} = 0,$$

$$\sigma_{b'}^2 = \frac{Q^2}{12}.$$

Trotz der unter Umständen etwas aufwändigen Rauschmodelle ist der Ersatz der Nichtlinearität durch ein additives Rauschen sehr attraktiv: Die Behandlung ist damit deutlich einfacher, denn die Mittel der linearen Systemtheorie bleiben erhalten.

Verständnisfragen

Partnerarbeit:

Versuchen Sie in Partnerarbeit folgende Fragen zu beantworten:

- Bei der Umsetzung einer FIR-Filterung auf einem DSP setzt man üblicherweise zunächst das Akkumulationsregister zu Null, addiert dann dort die Filter-Signal-Produkte, rundet und speichert dann die höherwertigen Bits als Ergebnis. Kann man das Runden „eleganter“ umsetzen?

.....
.....

- Was bedeuten die Begriffe „statistisch unabhängig“, „unkorreliert“ und „mittelwertfrei“?

.....
.....

Prinzipien der Digital-Analog-Umsetzung – Teil 1

Grundlegendes – Teil 1:

Bei der Digital-Analog-Umsetzung kann man prinzipiell zwischen einer Darstellung mit **ganzen Zahlen** und einer sog. **Festkommadarstellung** unterscheiden. Grundsätzlich wird dabei zunächst von einer **Zahlendarstellung nach Betrag und Vorzeichen** ausgegangen:

$$i = \pm \sum_{\nu=0}^{w-2} \xi_{\nu} 2^{\nu}.$$

In Summe werden damit w Bits verwendet!

Vorzeichenbit $w - 1$ **Betragsbits:** $[\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{w-2}]$

Alternativ kann auch eine normierte Größe im Zahlenbereich $[-1, 1]$ ($\implies D = 2$) definiert werden:

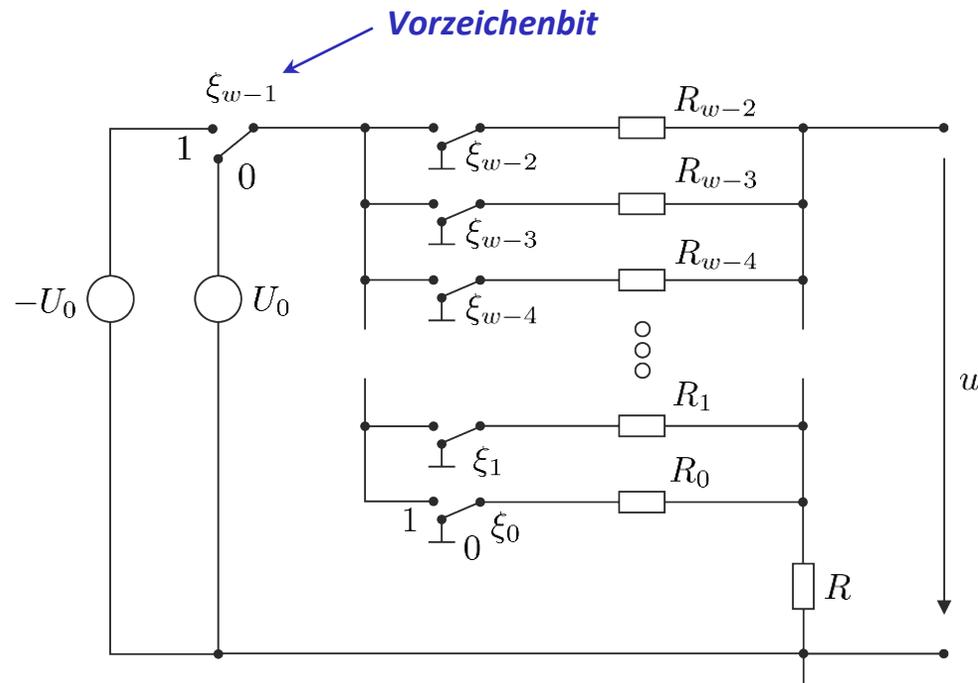
$$i' = \pm \sum_{\nu=0}^{w-2} \xi_{\nu} 2^{\nu-(w-1)} = \frac{i}{2^{w-1}}.$$

In beiden Fällen bezeichnet man ξ_0 als das sog. **least significant bit** und ξ_{w-1} als das **most significant bit** bzw. als das **Vorzeichenbit**.

Prinzipien der Digital-Analog-Umsetzung – Teil 2

Grundlegendes – Teil 2:

Annahme: Alle w Bits liegen parallel am Ausgang eines w -Bit-Puffer-Registers an und steuern von dort aus je einen Schalter gemäß: an = 1, aus = 0.



- Je nach Schalterstellung bzw. Bitwertigkeit „1“ ergibt sich ein Spannungsanteil entsprechend einem speziellen **Spannungsteiler**.
- Insgesamt ergibt sich die **Überlagerung** (Summe) dieser Anteile.
- Die Spannungsteiler (und damit die Widerstandswerte) müssen so **dimensioniert** werden, dass die Wertzuweisungen gemäß der vorherigen Folie gelten.

Prinzipien der Digital-Analog-Umsetzung – Teil 3

Grundlegendes – Teil 3:

Für die weiterführende Analyse der Schaltung der vergangenen Folie sei auf die Vorlesung „Signale und Systeme – Teil 2“ verwiesen. Hier wird hergeleitet, dass die Widerstandswerte das folgende Verhältnis aufweisen müssen:

$$\frac{R_\mu}{R_0} = 2^{-\mu}, \text{ mit } R_0 = R.$$

Das **Problem** dabei ist die notwendige **Genauigkeit der Widerstände**, insbesondere für große Wortlängen des Digital-Analog-Wandlers, z.B. für $w = 12$ muss gelten

$$R_{w-2} = R_{10} = \frac{R}{1024}.$$

Es gibt daher zahlreiche Alternativen zu dieser direkten Form der DA-Wandlung. Hierzu sei auf die Übung und auf die Literatur verwiesen:

- U. Tietze, C. Schenk: *Halbleiter-Schaltungstechnik*, 12. Auflage, Springer, Heidelberg, 2002.

Halteglieder – Teil 1

Grundlegendes – Teil 1:

Aus der Zahlenfolge $v(n)$ bzw. $[v(n)]_Q$ oder $y(n)$ bzw. $[y(n)]_Q$ wird im Digital-Analog-Umsetzer ein Signalwert $v_0(nT_A)$ (bzw. $[v_0(nT_A)]_Q$) oder $y_0(nT_A)$ (bzw. $[y_0(nT_A)]_Q$) erzeugt. **Theoretisch** sollte dabei eine **Impulsfolge**

$$\sum_n v_0(nT_A) \delta_0(t - nT_A)$$

(in Form des abgetasteten Signals) ausgegeben werden. **Praktisch** wartet man das „Einschwingen der Bits“ an den Registerausgängen und an den Schalter-Widerstands-Netzwerken ab und gibt dann (verzögert) den endgültigen Wert aus – und zwar konstant bis zum nächsten Takt (Dauer T_A).

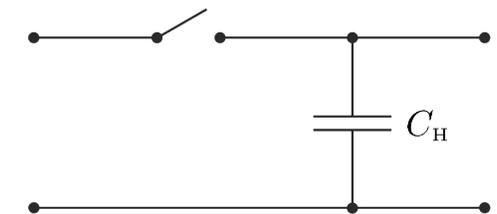
Praktisch kann man sich das Ausgangssignal eines Digital-Analog-Umsetzers als **Rechtecke der Dauer T_A mit der jeweiligen Höhe $v_0(nT_A)$** vorstellen.

Halteglieder – Teil 2

Grundlegendes – Teil 2:

Bemerkungen:

- Dasselbe Halteglied wird benutzt, um bei einem „langsamen“ **AD-Wandlungsvorgang** (z.B. serieller Wandler) das **Vergleichssignal lange genug konstant anlegen** zu können. Die im folgenden behandelte spektrale Auswirkung des Haltevorgangs tritt dort aber nicht in Erscheinung: Die Analog-Digital-Umsetzung liefert das Gewicht zum Impuls $v_0(nT_A) \delta_0(t - nT_A)$ lediglich etwas später ab!
- Die Realisierung eines Halteglieds kann man sich im Prinzip als **Schalter zur Übernahme eines Wertes und einen Speicher** (Haltekapazität C_H) vorstellen.

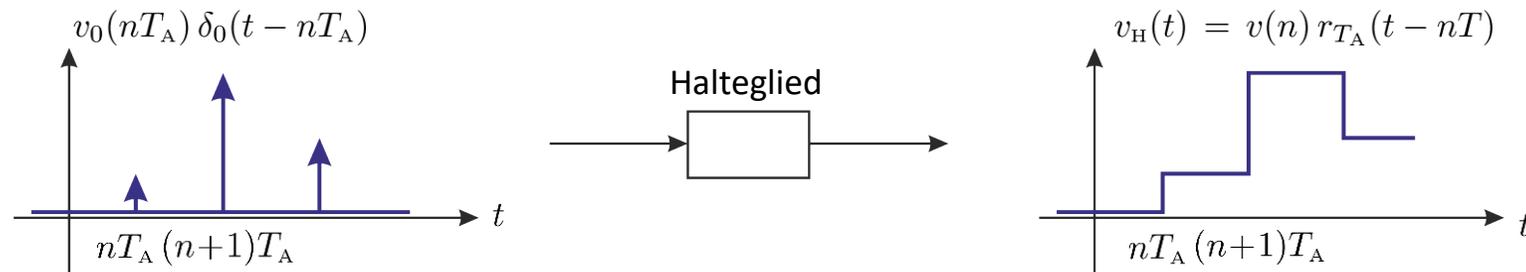


Realisierungsprobleme: Bei der Übernahme muss der Kondensator C_H schnell aufgeladen werden („folgen“), dann muss der Wert konstant gehalten werden („halten“), und kurz vor dem nächsten Übernahmezeitpunkt muss C_H schnell entladen werden!
Dies wird oft mit mehrstufigen Schalter-Speicher-Trennverstärker-Anordnungen realisiert.

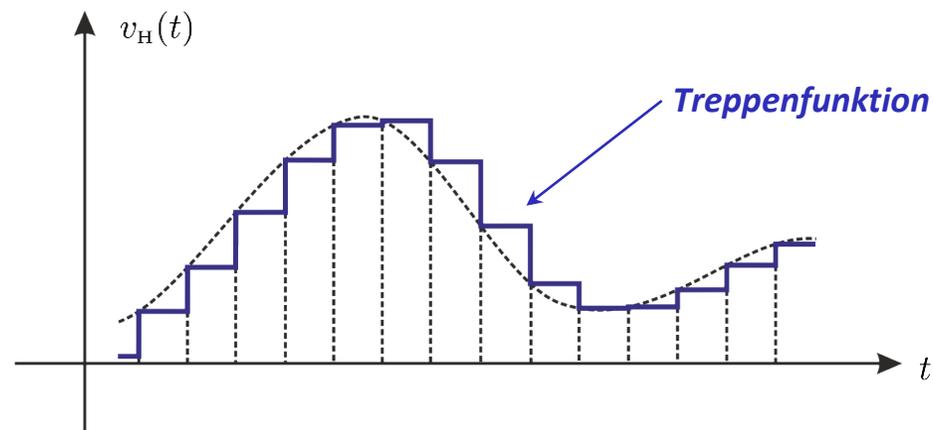
Halteglieder – Teil 3

Idealisierte Beschreibung – Teil 1:

Prinzipielle Anordnung:



Ein Halteglied erzeugt aus einem impulsförmigen Eingangssignal ein treppenförmiges Ausgangssignal:



Halteglieder – Teil 4

Idealisierte Beschreibung – Teil 2:

Bezeichnet man die Impulsantwort des Haltegliedes mit $h_{0,H}(t)$, so ergibt sich für das **Ausgangssignal des Haltegliedes**:

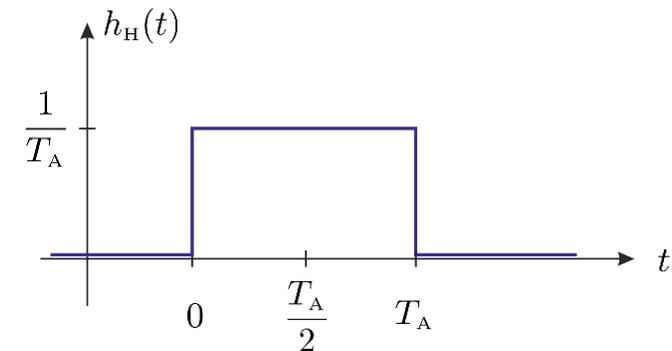
$$v_H(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left([v(n)]_Q \delta_0(t - nT_A) \right) * h_{0,H}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [v(n)]_Q T_A h_{0,H}(t - nT_A).$$

Die **Impulsantwort** des Haltegliedes ist dabei wie folgt definiert:

$$h_H(t) = \frac{1}{T_A} [\delta_{-1}(t) - \delta_{-1}(t - T_A)].$$

In den **Frequenzbereich** transformiert ergibt sich daraus folgender Frequenzgang:

$$H_H(j\omega) = \mathcal{F}\{h_H(t)\} = e^{-j\omega \frac{T_A}{2}} \frac{\sin\left(\omega \frac{T_A}{2}\right)}{\omega \frac{T_A}{2}}.$$



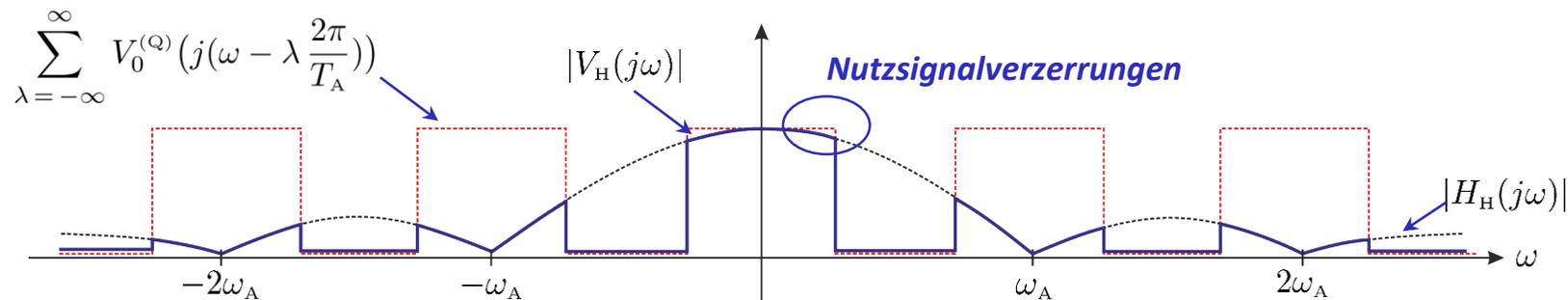
Halteglieder – Teil 5

Idealisierte Beschreibung – Teil 3:

Nach dem Faltungssatz der Fourier-Transformation (siehe z.B. Vorlesung „Signale und Systeme“) folgt für das **Spektrum des Ausgangssignals des Haltegliedes**:

$$\begin{aligned} V_H(j\omega) &= H_H(j\omega) \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} V_0^{(Q)}\left(j\left(\omega - \lambda \frac{2\pi}{T_A}\right)\right) \\ &= e^{-j\omega \frac{T_A}{2}} \frac{\sin\left(\omega \frac{T_A}{2}\right)}{\omega \frac{T_A}{2}} \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} V_0^{(Q)}\left(j\left(\omega - \lambda \frac{2\pi}{T_A}\right)\right). \end{aligned}$$

Das heißt: die **periodischen Wiederholungen werden durch den si-Frequenzgang des Haltegliedes gedämpft**. Neben der Dämpfung der (unerwünschten) spektralen Wiederholungen ergibt sich aber auch eine **Nutzsignalverzerrung** die evtl. kompensiert werden muss.



Verständnisfragen

Partnerarbeit:

Versuchen Sie in Partnerarbeit folgende Fragen zu beantworten:

- Wie müssten Sie die Impulsantwort des Halteglieds entwerfen, damit es keine Phasenverzerrung im Ausgangsspektrum gibt? Welche Filtereigenschaft geht damit verloren?

.....
.....

- Wie beurteilen Sie das Verhältnis zwischen Dämpfungsverzerrungen des Nutzsignals und Unterdrückung der spektralen Wiederholungen?

.....
.....

Abtastung von Folgen, Taktreduktion (Dezimation) – Teil 1

Abtastung mit und ohne Phasenversatz – Teil 1:

Aus der Vorlesung „Signale und Systeme“ ist folgendes bekannt:

Die **Abtastung** eines kontinuierlichen Signals $v_0(t)$ geschieht durch **Multiplikation mit einer Dirac-Impulsfolge** gemäß

$$v_*(t) = v_0(t) p_0(t).$$

Verwenden wir statt dessen **phasenverschobene Impulse**, so können wir diese Impulsfolge gemäß

$$p_0(t) = T_A \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_0(t - kT_A - t_0)$$

← **Verschiebung (Verzögerung)**

beschreiben. Transformieren wir dies in den **Frequenzbereich**, so erhalten wir

$$p_0(t) \circ \bullet P_0(j\omega) = \left[\sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \delta_0\left(\omega - \lambda \frac{2\pi}{T_A}\right) \right] e^{-j\omega t_0}.$$

Abtastung von Folgen, Taktreduktion (Dezimation) – Teil 2

Abtastung mit und ohne Phasenversatz – Teil 2:

Für das Spektrum des abgetasteten Signals ergibt sich dabei folgendes:

- Das **Spektrum** $V_0(j\omega)$ $\bullet \text{---} \circ v_0(t)$ wird bei **unverschobener Abtastung periodisch wiederholt** (mit der Periode $2\pi/T_A$). Dies konnten wir herleiten mit Hilfe des Faltungssatzes

$$V_0(j\omega) * \delta_0\left(\omega + \lambda \frac{2\pi}{T_A}\right) = V_0\left(j\left[\omega + \lambda \frac{2\pi}{T_A}\right]\right).$$

- Bei **phasenverschobener Abtastung** geht eine solche Herleitung entsprechend. Wir erhalten für das Spektrum des phasenverschobenen abgetasteten Signals:

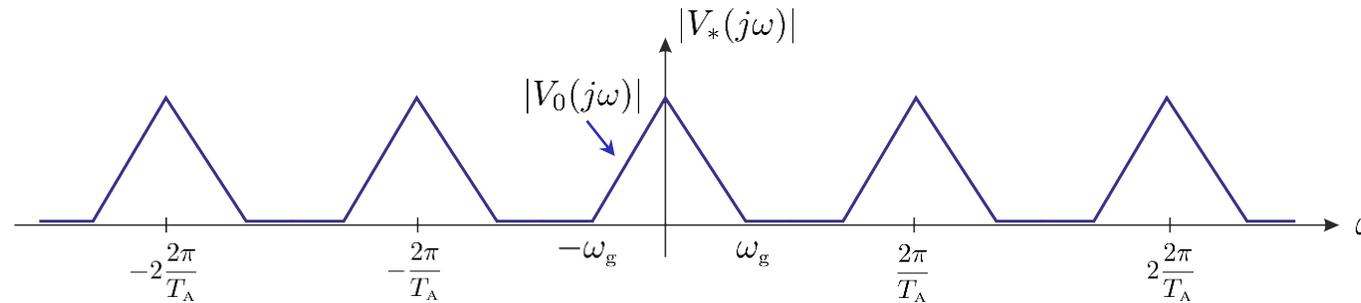
$$V_*(j\omega) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} V_0\left(j\left[\omega + \lambda \frac{2\pi}{T_A}\right]\right) e^{j\lambda \frac{2\pi}{T_A} t_0}.$$

Abtastung von Folgen, Taktreduktion (Dezimation) – Teil 3

Abtastung mit und ohne Phasenversatz – Teil 3:

Bemerkungen und Beobachtungen – Teil 1:

- Bei **Einhaltung des Abtasttheorems** (keine Überlappung der spektralen Wiederholungen) ergeben sich für $|V_*(j\omega)|$ unveränderte graphische Darstellungen:



- Bei zu niedriger Abtastrate (sog. „**Unterabtastung**“) sind die Phasendrehungen der sich überlappenden (=„Alias“) Anteile zu beachten. Es ergibt sich z.B. für $t_0 = T_A/2$

$$V_*(j\omega) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} V_0\left(j\left[\omega + \lambda\frac{2\pi}{T_A}\right]\right) \underbrace{e^{j\lambda\pi}}_{=(-1)^\lambda} .$$

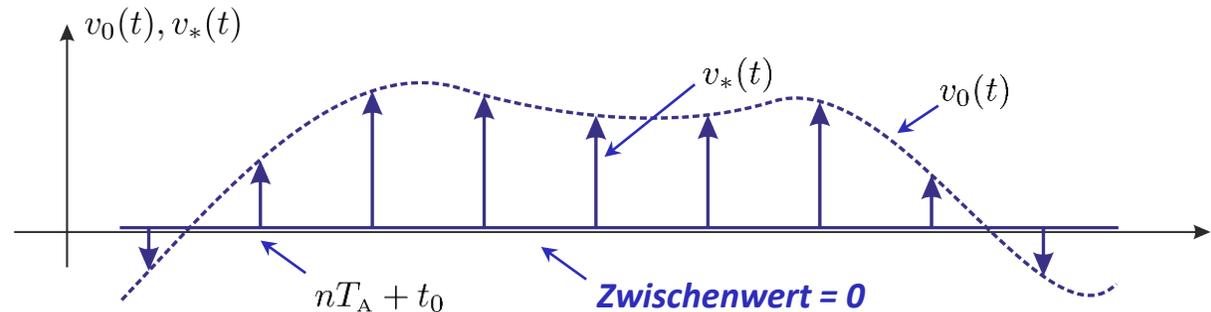
Diese Tatsache kann sehr nützlich sein!

Abtastung von Folgen, Taktreduktion (Dezimation) – Teil 4

Abtastung mit und ohne Phasenversatz – Teil 4:

Bemerkungen und Beobachtungen – Teil 2:

- Das Signal $v_*(t)$ mit $t \in \mathbb{R}$ ist nach wie vor **kontinuierlich** (mit Nullwerten zwischen den Impulsen $v_0(nT_A + t_0) \delta_0(t - kT_A - t_0)$) definiert – im Gegensatz zur Folge $v(n)$ mit $n \in \mathbb{Z}$.



- Der **Folgenwert** $v(n)$ **entspricht** jetzt **dem Signalwert** $v_0(nT_A + t_0)$, der als Impuls im Punkt $t = nT_A + t_0$ auftritt. Will man $v(n)$ mit dem Punkt $t = nT_A$ in Verbindung bringen, so muss man offenbar $v_*(t)$ um $-t_0$ **verschieben**.

Abtastung von Folgen, Taktreduktion (Dezimation) – Teil 5

Abtastung mit und ohne Phasenversatz – Teil 4:

Bemerkungen und Beobachtungen – Teil 3:

- Die **Auswirkungen dieser Verschiebung** kann man im Spektrum wie folgt beschreiben:

$$v_*(t + t_0) = v_0(\tau) p(\tau) \Big|_{\tau = t+t_0} = \underbrace{v_0(t + t_0)}_{\text{Verschobenes Signal}} \underbrace{p_0(t + t_0)}_{\text{Impulskamm ohne Phasenversatz}}$$

$$V_*(j\omega) e^{j\omega t_0} = \sum_{\lambda = -\infty}^{\infty} V_0\left(j\left[\omega + \lambda \frac{2\pi}{T_A}\right]\right) e^{j\left(\omega + \lambda \frac{2\pi}{T_A}\right)t_0}$$

Periodische Wiederholung von $V_0(j\omega) e^{j\omega t_0}$!

Abtastung von Folgen, Taktreduktion (Dezimation) – Teil 6

Abtastung von Folgen – Teil 1:

Analog zur Beschreibung der kontinuierlichen Abtastung können wir eine ähnliche Herleitung für **die Abtastung von Folgen** durchführen:

Gegeben sei dazu:

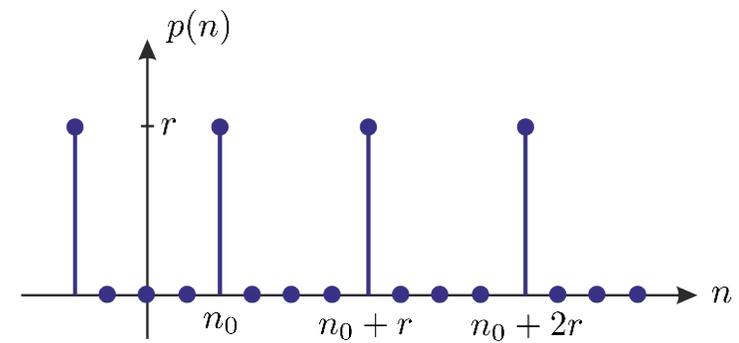
$$v(n), n \in \mathbb{Z} \longrightarrow \text{z.B. durch Abtastung erzeugt mit } f_A = \frac{1}{T_A}$$



$$V(e^{j\Omega}) \longrightarrow \text{Periodisches Spektrum mit der normierten Frequenz } \Omega = 2\pi \frac{f}{f_A}$$

Wir definieren uns nun eine periodische diskrete Impulsfolge gemäß

$$p(n) = r \sum_{i=-\infty}^{\infty} \gamma_0(n - ir - n_0).$$



Abtastung von Folgen, Taktreduktion (Dezimation) – Teil 7

Abtastung von Folgen – Teil 2:

Aus der Vorlesung „Signale und Systeme“ ist außerdem **folgender Zusammenhang bekannt:**

$$\sum_{\lambda=0}^{r-1} e^{j\lambda(n-\kappa)\frac{2\pi}{r}} = \begin{cases} r, & \text{falls } n = \kappa + ir, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit kann die Impulsfolge auch wie folgt geschrieben werden:

$$p(n) = r \sum_{i=-\infty}^{\infty} \gamma_0(n - ir - n_0) = \sum_{\lambda=0}^{r-1} e^{j\lambda(n-n_0)\frac{2\pi}{r}}.$$

Unter Berücksichtigung des **Transformationspaares**

$$e^{j\lambda(n-n_0)\frac{2\pi}{r}} = e^{j\lambda\frac{2\pi}{r}n} e^{-j\lambda\frac{2\pi}{r}n_0} \circ \bullet 2\pi \delta_0\left(\Omega - \lambda\frac{2\pi}{r}\right) e^{-j\lambda\frac{2\pi}{r}n_0}$$

ergibt sich schließlich für das **Spektrum der Impulsfolge:**

$$P(e^{j\Omega}) = 2\pi \sum_{\lambda=0}^{r-1} \delta_0\left(\Omega - \lambda\frac{2\pi}{r}\right) e^{-j\lambda\frac{2\pi}{r}n_0}. \quad \longrightarrow \quad \text{Impulskamm im Spektrum (ähnlich wie } P(j\omega)\text{), es gibt } r \text{ Impulse pro } 2\pi\text{-Intervall, darüber hinaus ist das Spektrum dann periodisch.}$$

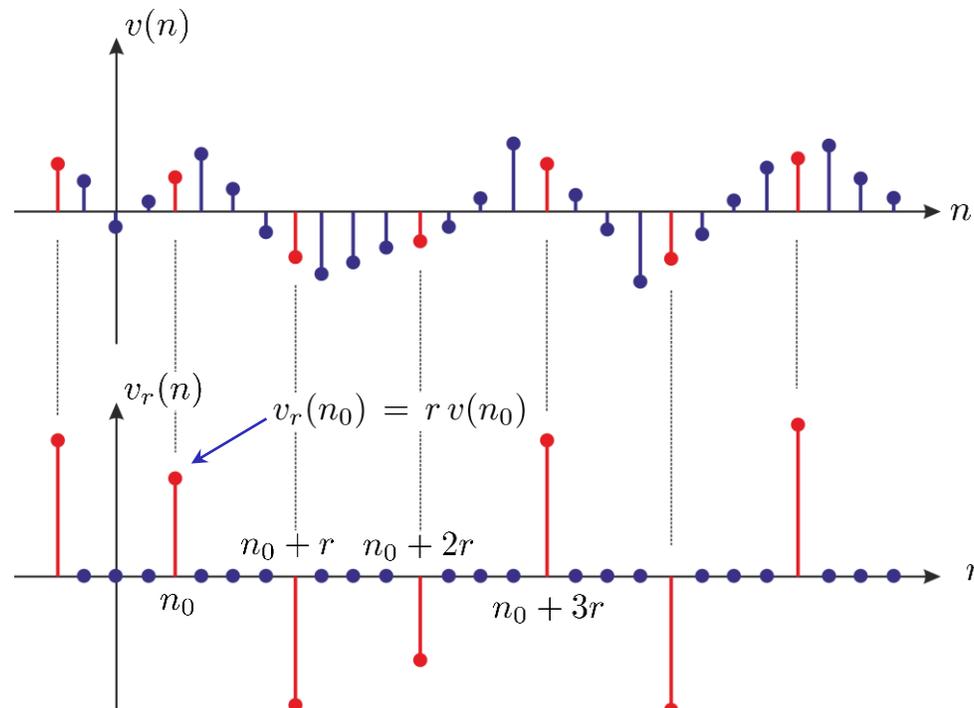
Abtastung von Folgen, Taktreduktion (Dezimation) – Teil 8

Abtastung von Folgen – Teil 3:

Eine diskrete Abtastung (erster Schritt einer Taktreduktion) wird nun durch Multiplikation der Eingangsfolge $v(n)$ und der Impulsfolge $p(n)$ umgesetzt:

$$v_r(n) = v(n) p(n).$$

Beispiel für $r = 4$:



Die Folge $v_r(n)$ ist zwischen den entnommenen Werten mit Nullwerten definiert! Die „Taktfrequenz“ (wenn man von einer Abtastung mit f_A bei der Entstehung von $v(n)$ ausgeht) ist nach wie vor $f_A = 1/T_A$!

Abtastung von Folgen, Taktreduktion (Dezimation) – Teil 9

Abtastung von Folgen – Teil 4:

Betrachten wir als nächstes die Auswirkungen der Abtastung im Spektralbereich: Es gilt hierbei folgender **Zusammenhang**:

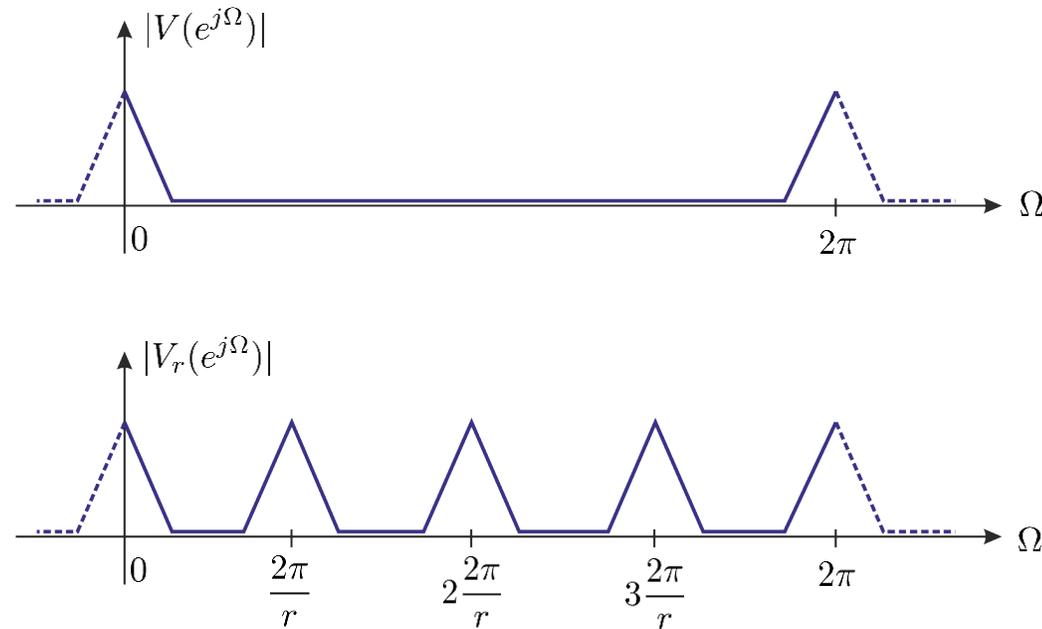
$$v(n)p(n) \circ \bullet \frac{1}{2\pi} V(e^{j\Omega}) * P(e^{j\Omega})$$

Angewandt auf die zuvor definierte Impulsfolge ergibt sich damit für das **Spektrum der abgetasteten Folge**:

$$V_r(e^{j\Omega}) = \sum_{\lambda=0}^{r-1} V(e^{j(\Omega - \lambda \frac{2\pi}{r})}) e^{-j\lambda \frac{2\pi}{r} n_0}.$$

Das ohnehin periodische Spektrum $V(e^{j\Omega})$ wird innerhalb einer Periode r -fach, d.h. im Abstand $2\pi/r$ wiederholt (mit konstanten komplexen Faktoren bei gegebenem Phasenversatz).

Abtastung von Folgen, Taktreduktion (Dezimation) – Teil 10

Abtastung von Folgen – Teil 5:Beispiel für $r = 4$:

Wenn mit f_A/r das Abtasttheorem eingehalten wird: d.h. wenn $V(e^{j\Omega})$ innerhalb einer Periode mit $\Omega_g \leq \pi/r$ bandbegrenzt ist, kann man den Zusammenhang wie links dargestellt verdeutlichen.

Die Überlegungen zur Auswirkung der Phasenverschiebung sind die gleichen wie jene für kontinuierliche Signale.

Abtastung von Folgen, Taktreduktion (Dezimation) – Teil 11

Abtastung von Folgen – Teil 6:

Ganz entsprechend zu den vorherigen Überlegungen kann man auch wieder die in $n = ir + n_0$ entnommenen Werte nachträglich in die Punkte $n = ir$ „**zurückverschieben**“: dazu wird $v_r(n)$ um $-n_0$ versetzt. Dann gilt:

$$v_r(n - (-n_0)) = v_r(n + n_0) \circ \bullet V_r(e^{j\Omega}) e^{j\Omega n_0} = \sum_{\lambda=0}^{r-1} V(e^{j(\Omega - \lambda \frac{2\pi}{r})}) e^{j(\Omega - \lambda \frac{2\pi}{r})n_0}.$$

Periodische Wiederholungen
von $V(e^{j\Omega}) e^{j\Omega n_0}$!



Abtastung von Folgen, Taktreduktion (Dezimation) – Teil 12

Abtastung von Folgen – Teil 7:

Anstelle der Fourier-Transformation kann man auch die **z-Transformation** heranziehen. Hierbei startet man wieder mit einer Beschreibung der Impulsfolge $p(n)$ durch eine **Summe orthogonaler Folgen**:

$$p(n) = \sum_{\lambda=0}^{r-1} e^{j\lambda(n-n_0)\frac{2\pi}{r}} = \sum_{\lambda=0}^{r-1} \underbrace{e^{-j\lambda n_0 \frac{2\pi}{r}}}_{W_r^{\lambda n_0}} e^{j\lambda \frac{2\pi}{r} n}.$$

Durch **Multiplikation** ergibt sich

$$v_r(n) = v(n) p(n) = \sum_{\lambda=0}^{r-1} W_r^{\lambda n_0} \left[v(n) e^{j\lambda \frac{2\pi}{r} n} \right].$$

Man vergleiche den Abschnitt über die DFT in der Vorlesung „Signale und Systeme“!

Modulation $v(n) z_{0,\lambda}^n$ mit $z_{0,\lambda} = e^{j\lambda \frac{2\pi}{r}} = W_r^{-\lambda}$.

Schließlich folgt mit dem **Modulationssatz der z-Transformation**:

$$V_r(z) = \sum_{\lambda=0}^{r-1} W_r^{\lambda n_0} V\left(\frac{z}{z_{0,\lambda}}\right) = \sum_{\lambda=0}^{r-1} W_r^{\lambda n_0} V(z W_r^{\lambda}).$$

Abtastung von Folgen, Taktreduktion (Dezimation) – Teil 13

Abtastung von Folgen – Teil 8:

Offenbar kann eine **versetzte Abtastung mit anschließendem „Zurechtschieben“** der Abtastwerte (in die Punkte $t = nT_A$ bzw. $n = ir$) in eine Phasenverschiebung des ursprünglichen Signals überführt werden (und damit in eine Modifikation des zugehörigen Spektrums).

Daher wird im weiteren (zunächst) **von einem Versatz abgesehen**, d.h.

$$\begin{aligned}t_0 &= 0, \\n_0 &= 0.\end{aligned}$$

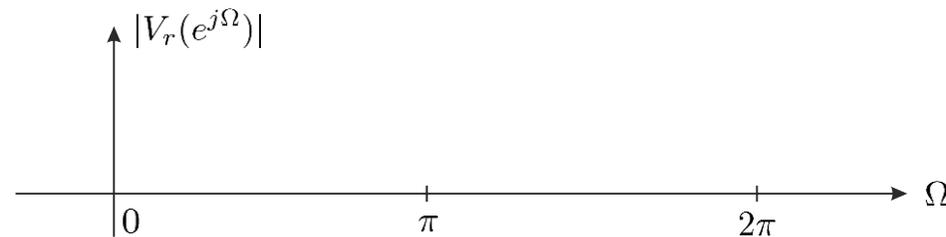
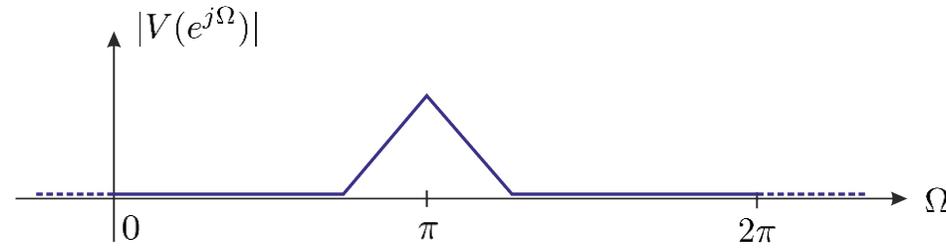
Außerdem sei darauf hingewiesen, dass das abzutastende Signal **bandbegrenzt** sein muss, damit **keine spektralen Überlappungen** (Aliasing) entstehen. Dies muss ggf. durch eine entsprechende **Tiefpassfilterung** (oder allgemeiner durch eine entsprechende **Bandpassfilterung**) sichergestellt werden.

Verständnisfragen

Partnerarbeit:

Versuchen Sie in Partnerarbeit folgende Fragen zu beantworten:

- Wie würde das Spektrum des um den Faktor 2 abgetasteten Signals aussehen, wenn das ursprüngliche Signal das unten dargestellte Spektrum hätte?



Könnte dieser Abtastvorgang später so umgekehrt werden, dass das ursprüngliche Signal wieder entsteht?

.....

.....

Abtastung von Folgen, Taktreduktion (Dezimation) – Teil 14

Taktreduktion – Teil 1:

Bisher haben wir die „**kontinuierliche**“ **Abtastung**

$$v_0(t) \implies v_*(t)$$

bzw. die „**diskrete**“ **Abtastung**

$$v(n) \implies v_r(n)$$

betrachtet. Bei der diskreten Abtastung entstanden viele **Nullwerte** (an den Stellen $n \neq ir$).

Wir wollen nun eine **Folge ohne Nullwerte**, d.h. eine neue Folge,

$$\tilde{v}(n) = v_r(nr) = v(nr)|_{n_0=0}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

betrachten. Dies **entspricht**, wenn $v(n)$ durch Abtastung mit $f_A = 1/T_A$ entstanden ist,

- einer **Abtastung** (von $v_0(t)$) mit $\tilde{f}_A = f_A/r$,
- einer **Taktreduktion** beim Erzeugen bzw. Verarbeiten der Folge $v_r(n)$ (nur alle r Takte der ursprünglichen Rate tritt ein Wert auf),
- einer **Ausdünnung** der ursprünglichen Folge („**Dezimation**“).

Abtastung von Folgen, Taktreduktion (Dezimation) – Teil 15

Taktreduktion – Teil 2:

Spektraldarstellung mit Hilfe anschaulicher Überlegungen:

- $\tilde{v}(n)$ enthält die selben Informationen (die selben Werte wie $v_r(n)$). Die „**Spektralform**“ sollte daher erhalten bleiben.
- $\tilde{v}(n)$ lässt sich deuten, als abgetastete Version von $v_0(t)$ mit \tilde{f}_A bzw. \tilde{T}_A . Die dabei **verwendete Kreisfrequenz** ist

$$\tilde{\Omega} = 2\pi \frac{f}{\tilde{f}_A} = 2\pi \frac{f}{f_A} r = \Omega r.$$

Damit erhält man im **Spektrum**

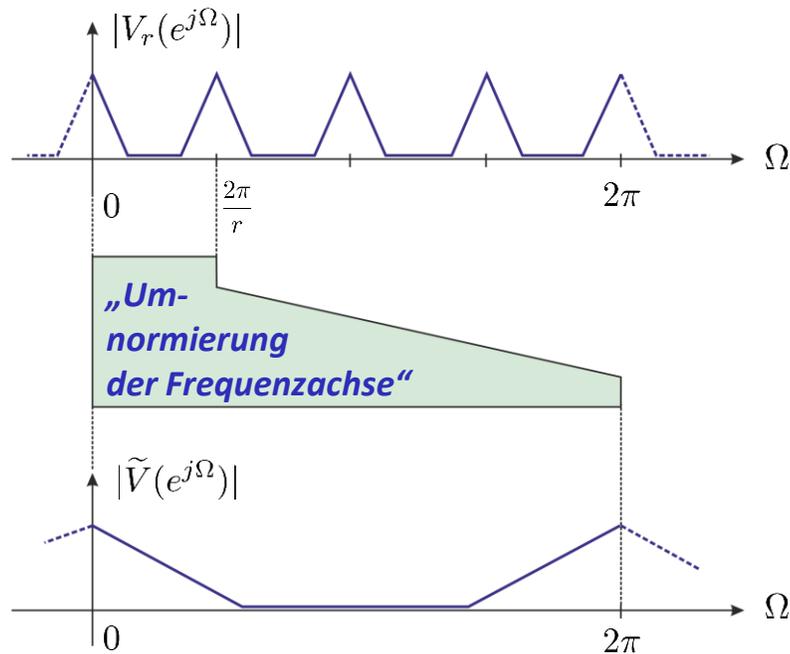
$$\tilde{V}(e^{j\tilde{\Omega}}) = V_r(e^{j\frac{\tilde{\Omega}}{r}}).$$

← **Offenbar entspricht das Weglassen der Nullwerte einer Umnormierung der Frequenzachse!**

Abtastung von Folgen, Taktreduktion (Dezimation) – Teil 16

Taktreduktion – Teil 3:

Analog zu den vorangegangenen Überlegungen kann man das Spektrum des taktreduzierten Signals auch herleiten:

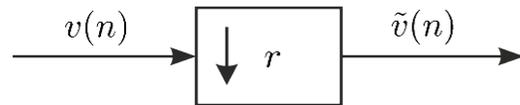


$$\begin{aligned}
 \tilde{V}(e^{j\Omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{v}(n) e^{-j\Omega n} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_r(nr) e^{-j\Omega n} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{r} \sum_{\lambda=0}^{r-1} e^{j\frac{2\pi}{r} n\lambda} \right] r v(n) e^{-j\frac{\Omega}{r} n} \\
 &= \sum_{\lambda=0}^{r-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} v(n) e^{j\frac{2\pi}{r} n\lambda} e^{-j\frac{\Omega}{r} n} \\
 &= \sum_{\lambda=0}^{r-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} v(n) e^{-j(\frac{\Omega}{r} - \frac{2\pi}{r}\lambda)n} \\
 &= \sum_{\lambda=0}^{r-1} V\left(e^{j(\frac{\Omega}{r} - \frac{2\pi}{r}\lambda)}\right) = V_r\left(e^{j\frac{\Omega}{r}}\right).
 \end{aligned}$$

Abtastung von Folgen, Taktreduktion (Dezimation) – Teil 17

Taktreduktion – Teil 4:

Für die zuvor beschriebene Gesamtoperation „**Abtastung einer Folge im Abstand r und Weglassen der $r - 1$ Nullwerte zwischen zwei Abtastpunkten**“ verwendet man das folgende Symbol:



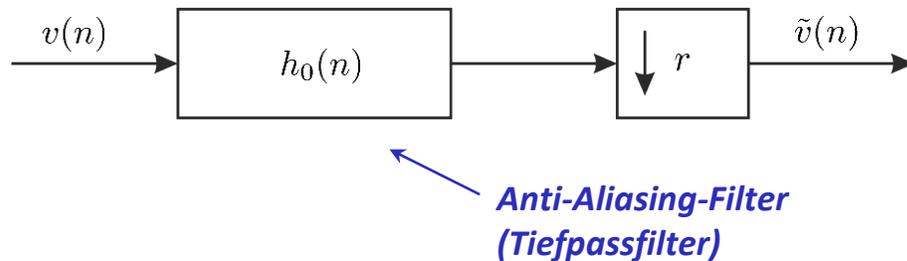
Die entsprechende Darstellung in der **z -Transformation** lautet (ohne Herleitung):

$$\begin{aligned}\tilde{V}(z) &= V_r\left(z^{\frac{1}{r}}\right) \\ &= \sum_{\lambda=0}^{r-1} V\left(z^{\frac{1}{r}} e^{-j\frac{2\pi}{r}\lambda}\right).\end{aligned}$$

Abtastung von Folgen, Taktreduktion (Dezimation) – Teil 18

Taktreduktion – Teil 5:

Üblicherweise verwendet man vor der Taktreduktion ein **Tiefpassfilter**, um sicherzustellen, dass es keine spektralen Überlappungen (Aliasing) gibt. Die Gesamtstruktur dieser Operation sieht dann folgendermaßen aus:



Das Tiefpassfilter ist dabei so auszulegen, dass es ab einer Kreisfrequenz von $\Omega_g = \frac{\pi}{r}$ ausreichend Dämpfung aufweist!

Takterhöhung, Spreizung, Interpolation – Teil 1

Spreizung einer Folge – Teil 1:

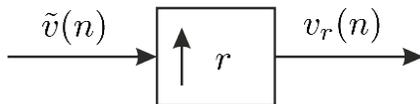
Die Umkehrung der zuvor beschriebenen Abtastung wird als „**Spreizung**“ einer Folge bezeichnet.

Dies bedeutet, dass man $r - 1$ **Nullwerte zwischen zwei Werten von $\tilde{v}(n)$ einfügt**. Dies lässt sich wie folgt beschreiben:

$$v_r(n) = \begin{cases} \tilde{v}(n/r) & \text{falls } n = i r, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

← **Man kann sich dies als „Auseinanderziehen“ von $\tilde{v}(n)$ (also „Spreizen“) vorstellen!**

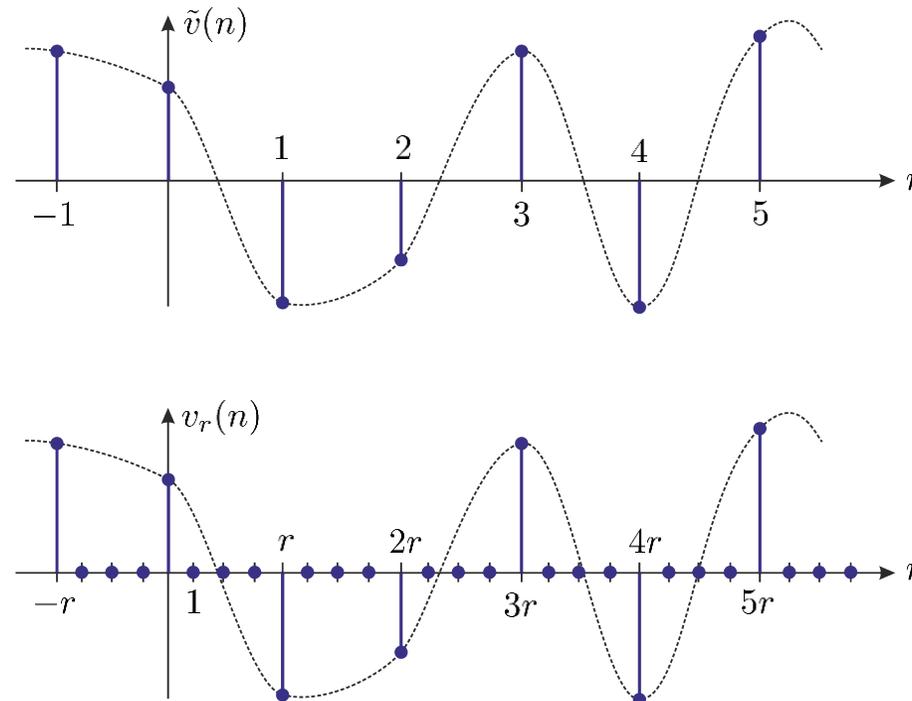
Analog zur Taktreduktion hat sich hier folgendes **Symbol** etabliert:



Takterhöhung, Spreizung, Interpolation – Teil 2

Spreizung einer Folge – Teil 2:

Im **Zeitbereich** kann man dies folgendermaßen darstellen (Beispiel für $r = 4$):



Man beachte, dass hierbei zwar die Taktrate erhöht wird, dabei werden aber keine neuen Informationen bzw. keine neuen (von Null verschiedenen) Werte erzeugt.

Spreizung einer Folge – Teil 3:

Die Spreizung im Zeitbereich führt im **Frequenzbereich** zu einer „**Umnormierung**“ der Frequenz:

$$V_r(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_r(n) e^{-j\Omega n}$$

... Ausnutzen, dass nur jeder r-te Wert $\neq 0$...

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} v_r(mr) e^{-j\Omega mr}$$

... Definition der Spreizung verwenden ...

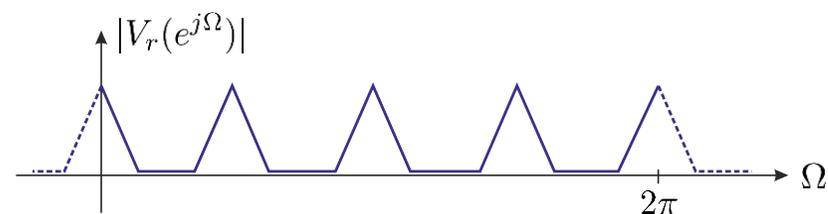
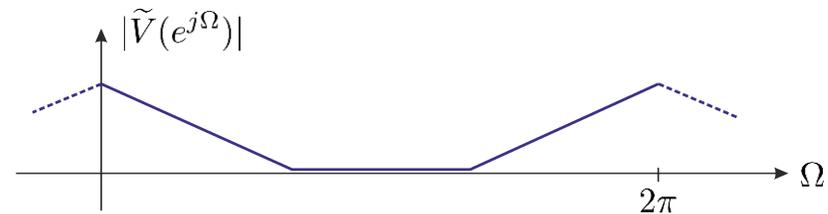
$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{v}(m) e^{-j(\Omega r)m}$$

... Definition der Fourier-Transformation ...

$$= \tilde{V}(e^{j\Omega r}).$$

Analog dazu erhält man im **z-Bereich**:

$$V_r(z) = \tilde{V}(z^r).$$



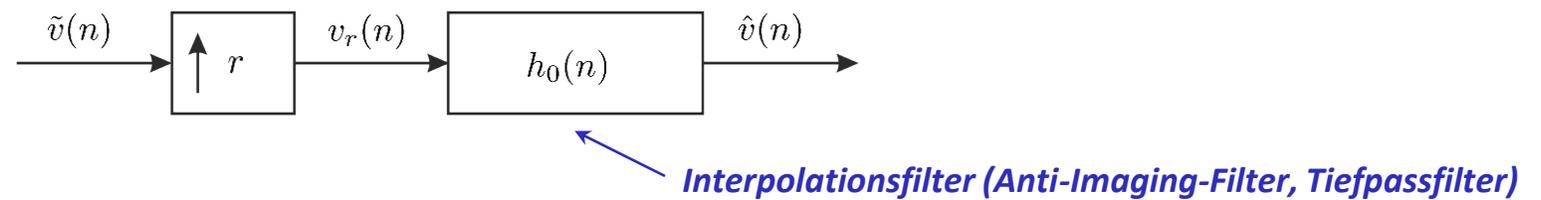
Takterhöhung, Spreizung, Interpolation – Teil 4

Interpolation – Teil 1:

Bei einer **Interpolation** versucht man „**Zwischenwerte**“ zu einer gegebenen Zahlenfolge zu erzeugen, d.h. man versucht die bei der Spreizung erzeugten Nullwerte durch „geeigneterer“ Werte zu ersetzen.

Die **Interpolation geht daher über die Spreizung hinaus**.

Man kann sich die Interpolation als eine **Spreizung und ein nachgeschaltetes Filter** vorstellen:



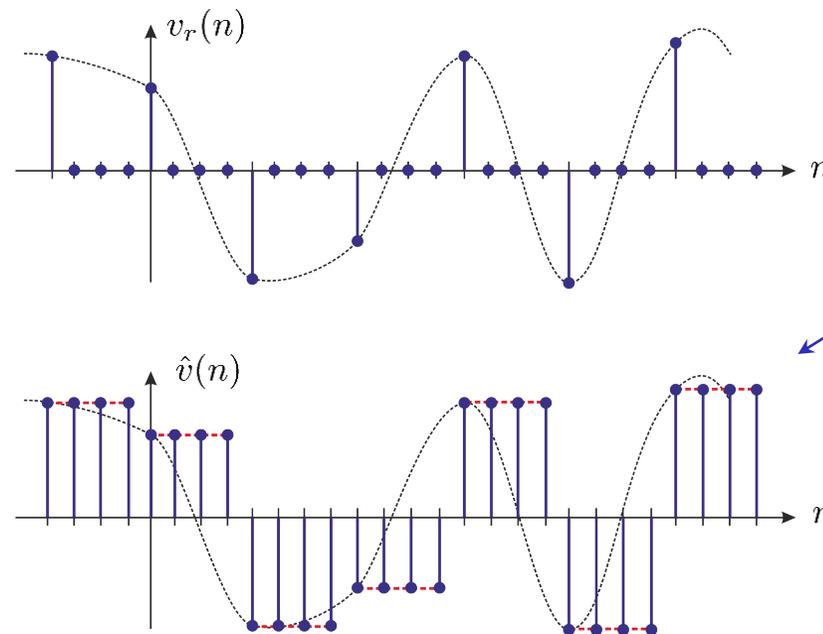
Wir werden nun einige **Interpolationsmöglichkeiten** kennenlernen und diese **in die Spreizungs-Filter-Variante überführen**.

Takterhöhung, Spreizung, Interpolation – Teil 5

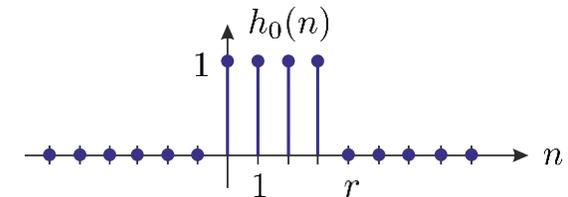
Interpolation – Teil 2:

Interpolationsmöglichkeiten (Teil 1):

- **Interpolation nullter Ordnung** (Wiederholung des alten Signalwertes):



Realisierung durch ein System, das auf einen Impuls mit r gleich hohen Impulsen reagiert, d.h. mit einer Impulsantwort:



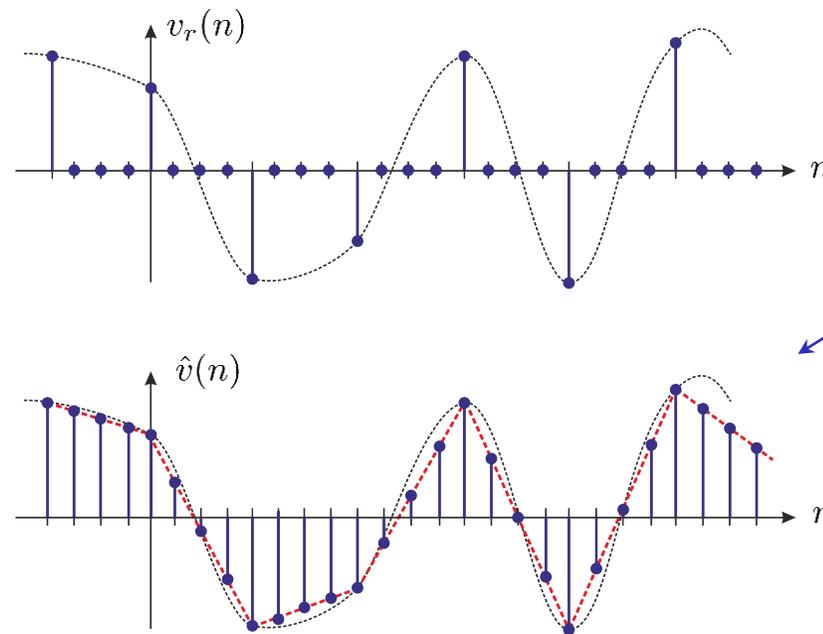
Dies wird als „diskretes Halteglied“ bezeichnet.

Takterhöhung, Spreizung, Interpolation – Teil 6

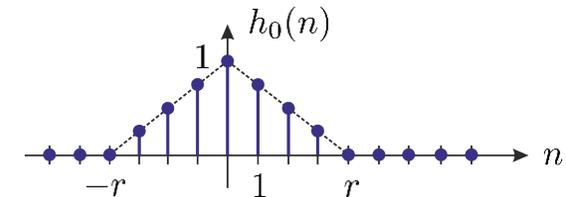
Interpolation – Teil 3:

Interpolationsmöglichkeiten (Teil 2):

□ **Interpolation erster Ordnung** (lineare Interpolation):



Realisierung durch ein System, dass auf einen Impuls mit einem Dreieck reagiert, d.h. mit einer Impulsantwort:



Dies wird als lineare Interpolation bezeichnet.

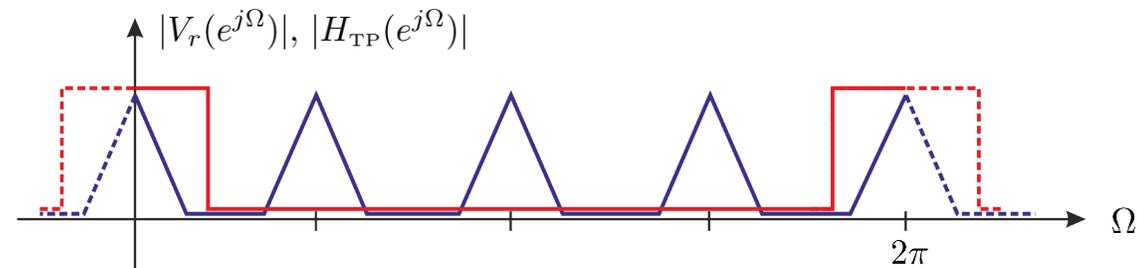
Takterhöhung, Spreizung, Interpolation – Teil 7

Interpolation – Teil 4:

Interpolationsmöglichkeiten (Teil 3):

□ **Tiefpassüberlegung im Frequenzbereich** (Teil 1):

Durch die Spreizung entstehen Spiegelspektren („image“-Spektren), die mit einem Tiefpassfilter entfernt bzw. gedämpft werden.



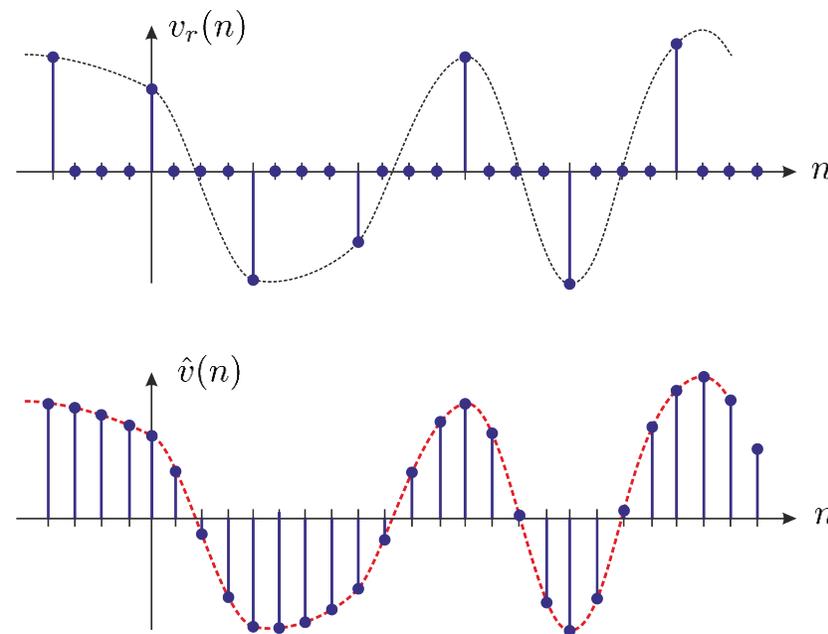
Das Tiefpassfilter kann z.B. als **zeitlich begrenztes, ideales Tiefpassfilter** realisiert werden:

$$h_0(n) = \begin{cases} \frac{\Omega_g}{\pi} \frac{\sin(\Omega_g(n-n_0))}{\Omega_g(n-n_0)}, & \text{falls } 0 \leq n \leq 2n_0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Takterhöhung, Spreizung, Interpolation – Teil 8

Interpolation – Teil 4:

Interpolationsmöglichkeiten (Teil 3):

□ **Tiefpassüberlegung im Frequenzbereich** (Teil 2):

Eine Interpolation erzeugt streng genommen Zwischenwerte, ohne Veränderung gegebener (Stütz-) Werte. Das wird erreicht, wenn man von der Impulsantwort äquidistante Nullstellen fordert (gegeben bei der si-Interpolation, beim Halteglied und bei linearer Interpolation, aber nicht allgemein bei Tiefpassfiltern).

Beispiel – Teil 1

Aufgabe:

Übertragen Sie vier (bandbegrenzte) **Telefonsignale** über eine (Audio-) Leitung und stellen Sie die Eingangssignale am Leitungsende wieder einzeln zur Verfügung!

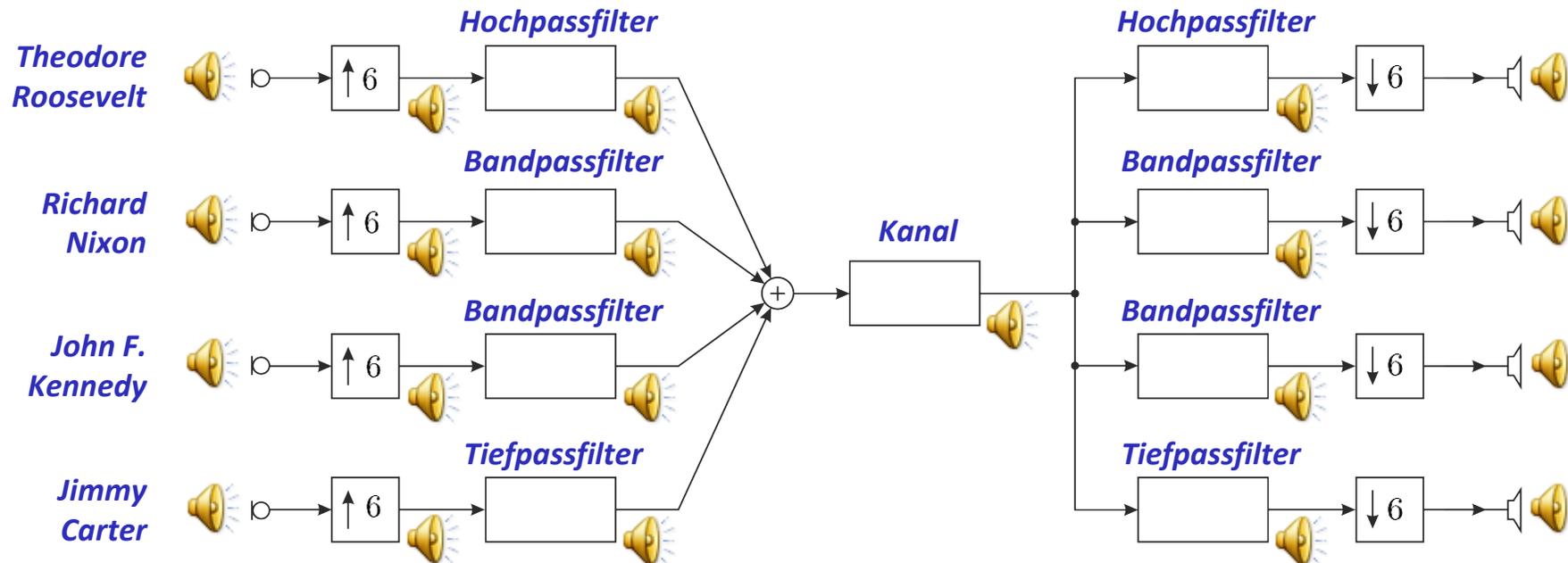
Verwenden Sie dazu (neben der Kabelübertragung) folgende Signalverarbeitungseinheiten:

- Tiefpassfilter** mit einstellbarer Bandbreite,
- Hochpassfilter** mit einstellbarer Bandbreite,
- Bandpassfilter** mit einstellbarer Mittenfrequenz und Bandbreite,
- Signalspreizungen** um den Faktor r und
- Unterabtastungen** um den Faktor r .

Beispiel – Teil 2

Lösung:

Übersichtsstruktur:



Test in der Vorlesung ...

*Die ursprünglichen Aufnahmen wurden „pausenbereinigt“
und stammen von der Michigan State University, USA.*

Abschließende Zusammenfassung

- ❑ Einführung
- ❑ **Signale**
 - ❑ *Signalarten*
 - ❑ *Analog-Digital- und Digital-Analog-Umsetzungen*
 - ❑ *Halteglieder*
 - ❑ *Taktreduktion und Takterhöhung*
- ❑ Spektren
- ❑ Digitale Filter